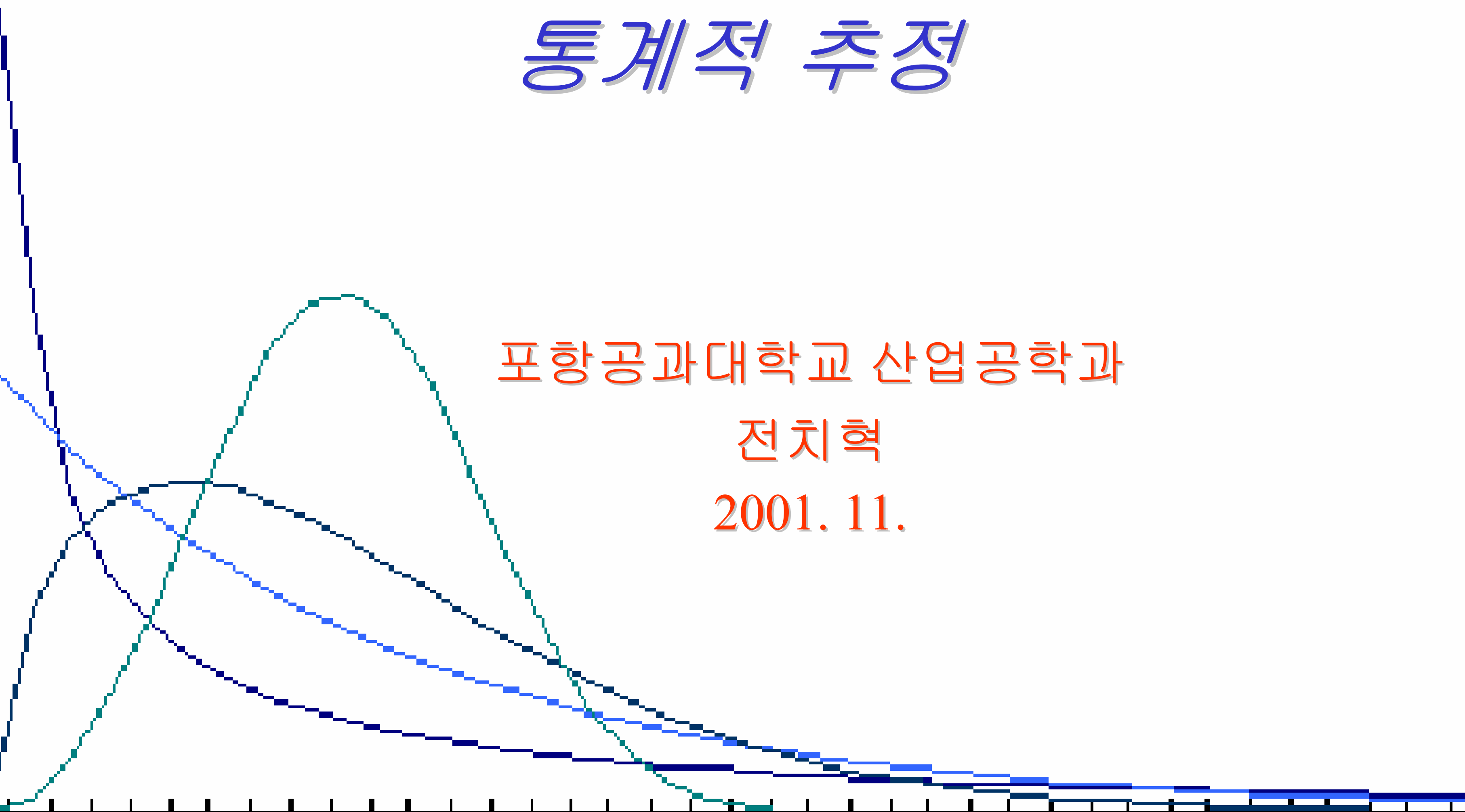
수명분포 및 신뢰도의 통계적 추정



포항공과대학교 산업공학과

전치혁

2001. 11.

수명 및 수명분포

- 수명
  - “고장”까지의 시간
  - 확률변수로 간주
  - 통상 잘 알려진 분포를 따른다고 가정

- 수명 분포
  - 확률밀도함수 또는 (누적)분포함수로 표현
  - 신뢰도, 고장률, MTTF 등 신뢰성지표는 수명분포로부터 도출
  - 수명분포 추정은 분포함수관련 모수의 추정

누적분포함수 및 확률밀도함수

- 누적분포함수(cumulative distribution function)
  - 어떤 특정 확률 변수가 특정 값 t 보다 작을 확률
  - 확률변수 X 의 누적분포함수 F(.) 는 모든 실수 t 에 대하여 다음과 같이 정의된다.

$$F(t) = P(X \le t)$$

  - 구간에 대한 확률 정의

$$P\{a < X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X \le a\} = F(b) - F(a).$$

- 확률밀도함수(Probability Density Function)

$$P\{a \le X \le b\} = P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx$$

  - 위의 함수 f(x)가 존재한다고 할 때 이 함수 f(x)를 확률변수 X의 확률밀도함수라 한다.

누적분포함수의 성질

- 누적 분포함수와 확률밀도함수와의 관계

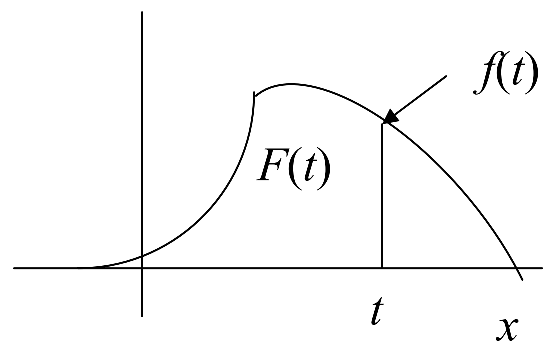
$$F(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

  – 누적분포함수를 알면 미분을 통해 확률밀도함수를 알수 있다.

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

  – 전구간에 대해 확률밀도함수를 적분하면 1이 된다.

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$



누적분포함수 및 확률밀도함수의 예

- 어떤 설비의 수명을 나타내는 확률변수 X의 누적 분포 함수가 다음과 같은 형태라 하자.

$$F(t) = 1 - e^{-t^2}, \qquad t \geq 0$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = 2e^{-t^2}, \qquad t \geq 0$$

$$\begin{aligned} P\{1 < X \leq 2\} &= F(2) - F(1) \\ &= (1\text{-}e^{-4}) - (1\text{-}e^{-1}) = 0.3679 - 0.0183 \end{aligned}$$

- 신뢰도함수와 고장률
  - 신뢰도함수(Reliability function) : R(t)

⇒시간의 함수로서 특정한 시간까지 고장없이 주어진 임무를 수행할 확률

$$R(t) = P(X \geq t) = 1 - F(t)$$

  - 고장률(failure rate or hazard rate) :

⇒ 시간의 함수로서 시간 t에서의 고장률은 시간 t까지 고장이 없다가 시간 t 직후 고장을 일으킬 단위시간당 빈도를 의미

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(X \geq t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

⇒ $\lambda(t)\Delta t$ 는 시간 t까지 고장이 없다가 $(t, t+\Delta t)$사이에 고장을 일으킬 확률로 해석

수명의 기대치와 분산

- 기대치(또는 평균) (expectation; mean)
  - 확률변수가 취하는 평균적인 값

$$E[X] = \int_0^\infty x f(x)dx = MTTF$$

- 분산(variance)
  - 평균을 기준으로 퍼져있는지를 판단하는 척도

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

where $E[X^2] = \int_0^\infty x^2 f(x)dx$

- 표준편차(standard deviation)
  - 분산의 제곱근

$$std(X) = \sqrt{Var[X]}$$

지수분포

- 지수분포
  - 수명분포로 가장 널리 이용
  - 확률밀도함수

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0$$

  - 누적분포함수

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$$

  - 신뢰도 함수

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

  - 고장률

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

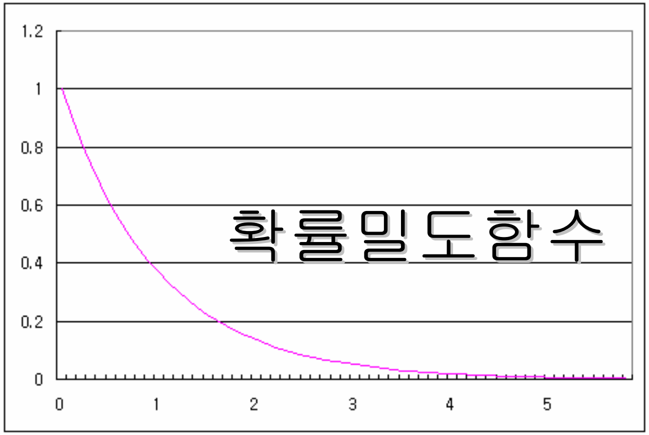
지수분포의 모수: λ

-> 고장률,

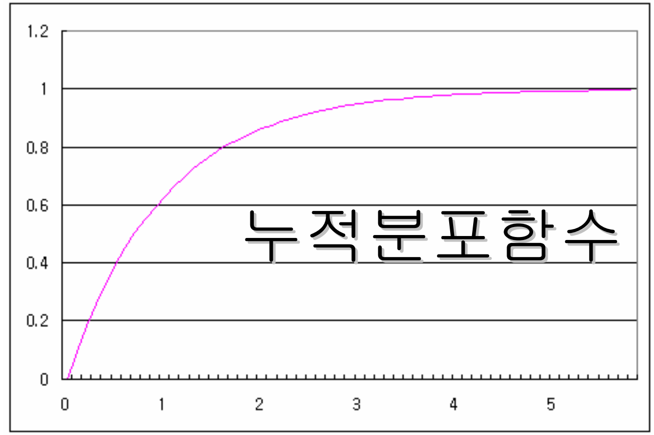
평균수명의 역수

지수분포: λ=2 일때

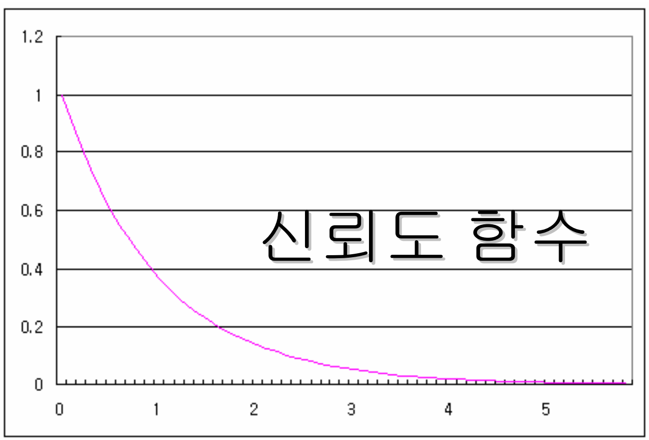
$$f(t) = 2e^{-2t}, \qquad t \geq 0$$



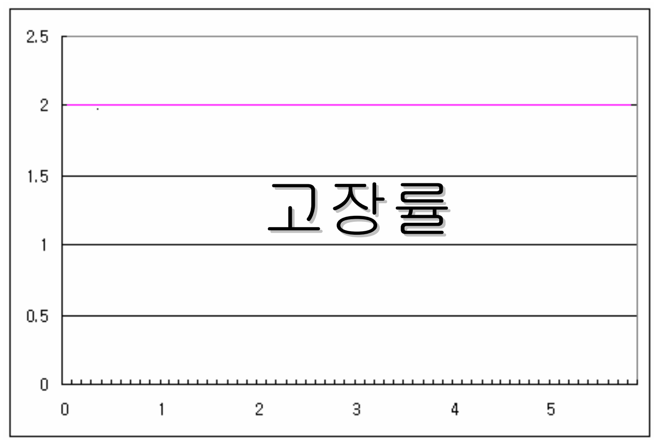
$$F(t) = 1 - e^{-2t}$$



$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-2t}$$



$$\lambda(t) = \frac{2e^{-2t}}{e^{-2t}} = \lambda$$



와이블 분포

- 와이블분포
  - 고장률이 노후 등으로 시간에 따라 커지는 경우에 사용
  - 확률밀도함수

$$f(t) = \alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^{\alpha}}, \qquad t \geq 0$$

  - 누적분포함수

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = 1 - e^{-(\lambda t)^{\alpha}}$$

  - 신뢰도 함수

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-(\lambda t)^{\alpha}}$$

  - 고장률

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^{\alpha}}}{e^{-(\lambda t)^{\alpha}}} = \alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}$$

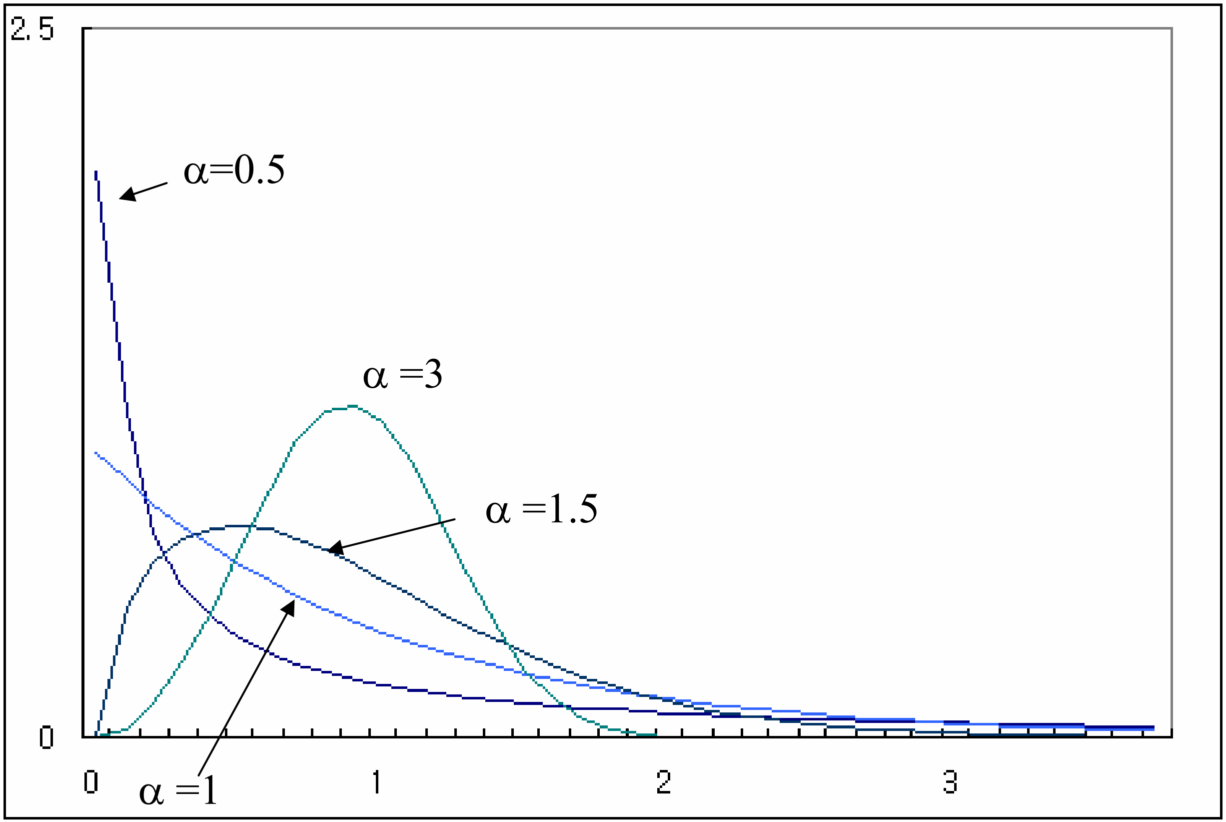
와이블분포의 모수

α: 형태모수
(shape parameter)

λ: 척도모수
(scale parameter)

와이블 분포의 확률밀도함수

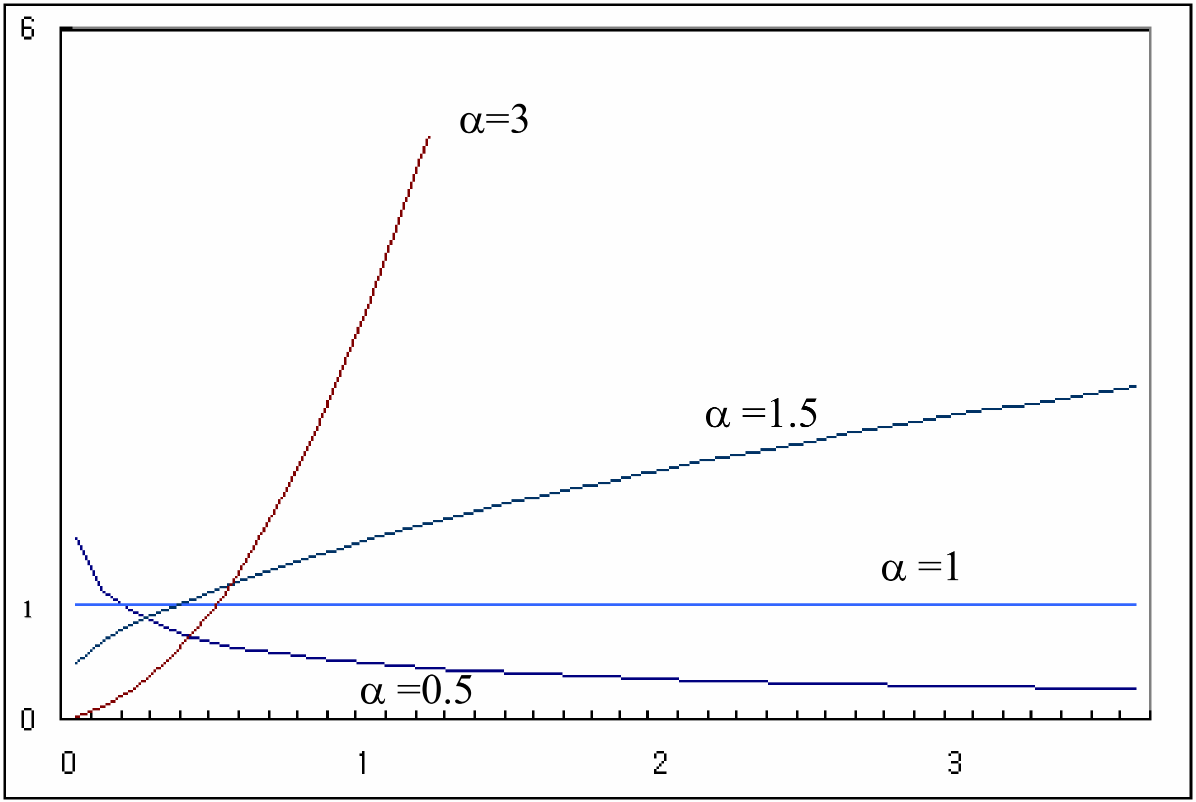
$$f(t) = \alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^{\alpha}}, \qquad t \geq 0$$



와이블 분포의 고장률

$$\lambda(t) = \alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}$$

α>1: increasing
α=1: constant
α<1: decreasing



수명분포와 MTTF

- 수명 X 가 지수분포를 따른다고 할 때

$$MTTF = E[X] = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

- 수명 X가 와이블분포를 따른다고 할 때

$$MTTF = E[X] = \frac{1}{\alpha\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} dx = (\beta-1)\Gamma(\beta-1)$$

와이블 분포의 예

- 어떤 부품의 수명이 α=2, λ=0.0001 의 와이블분포를 따른다고 하자.
  - 평균 수명

$$MTTF = E[X] = (1/0.0002)\Gamma(0.5) = 5000\sqrt{\pi} = 8862.27$$

  – t=10,000 (시간)에서의 신뢰도

$$R(10000) = e^{-(0.0001t)^2}\Big|_{t=10000} = e^{-1} = 0.3679$$

  – t=10,000 (시간)에서의 고장률

$$\lambda(10000) = 0.0002(1)^{2-1} = 0.0002$$

  – t=20,000 (시간)에서의 고장률

$$\lambda(20000) = 0.0002(2)^{2-1} = 0.0004$$

분포함수의 추정

- 추정
  - 고장데이터를 바탕으로 수명분포의 모수값들을 정하는 것
- 검정
  - 고장데이터들이 주어진 분포에 잘 맞는지 여부를 통계적으로 판단하는 것
- 추정 방법
  - 확률지에 의한 방법

  - 모멘트 방법

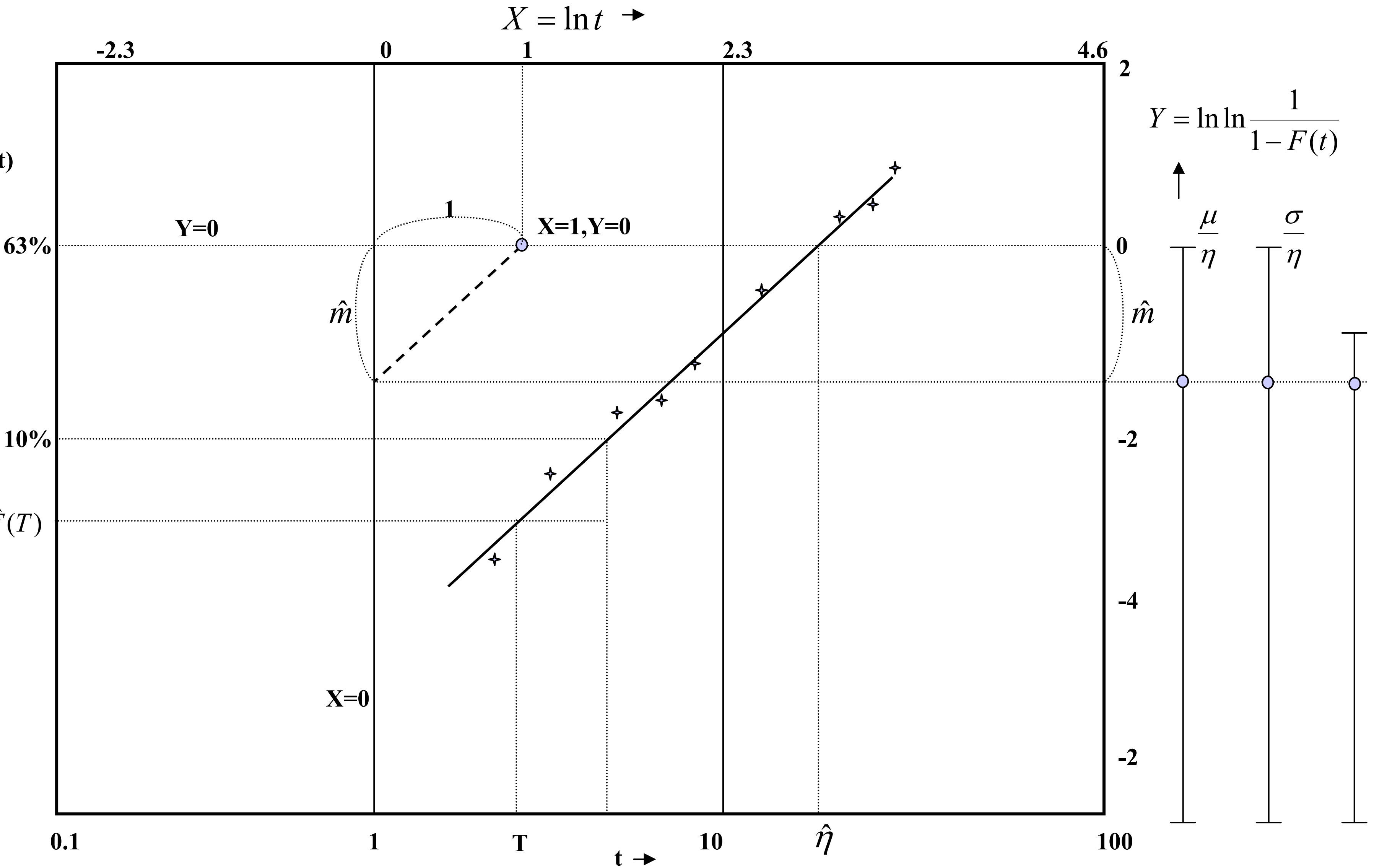
$$E[X] = \overline{X}; \quad Var[X] = s^2$$

  - 최우추정법: 우도함수를 최대화하는 모수값 결정

와이블 확률지

$F(t) = 1 - e^{\ldots}$ $\qquad \eta = t_0 \ldots$

$$\mu = t_0^{1/m}\Gamma(1+1/m) \qquad \sigma = t_0^{1/m}\{\Gamma(1+2/m) - \Gamma^2(1+1/m)\}$$

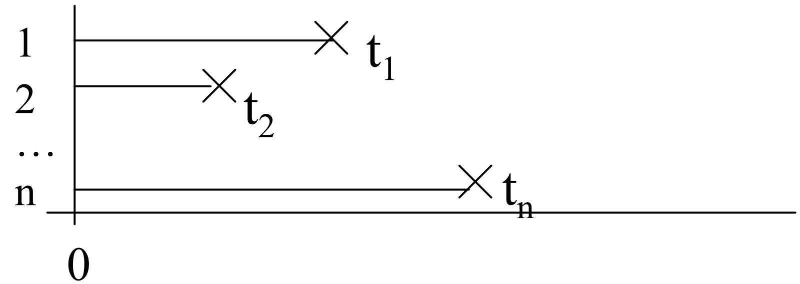


수명시험과 고장데이터 종류

- n 개의 부품을 시간 0에 시험 시작

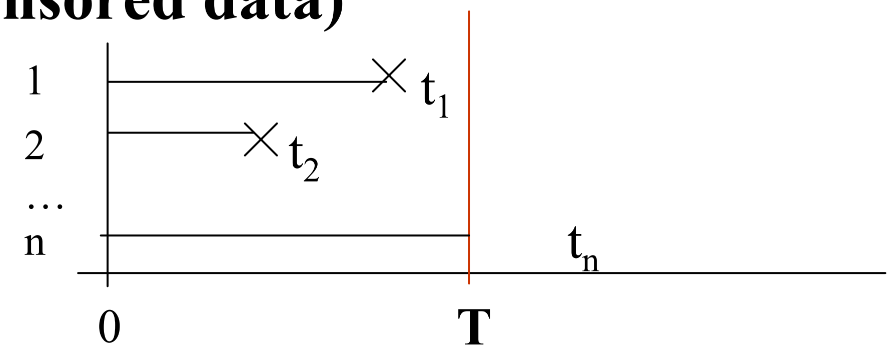
- 완전고장데이터

  n개의 부품이 모두
  고장날때까지 시험



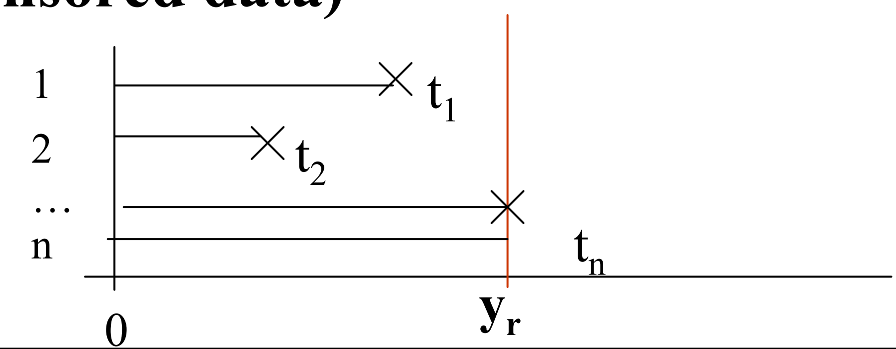
- 정시고장데이터 **(type I censored data)**

  주어진 시간 T까지
  시험



- 정수고장데이터 **(type II censored data)**

  정수 r개의 부품이
  고장날때까지 시험



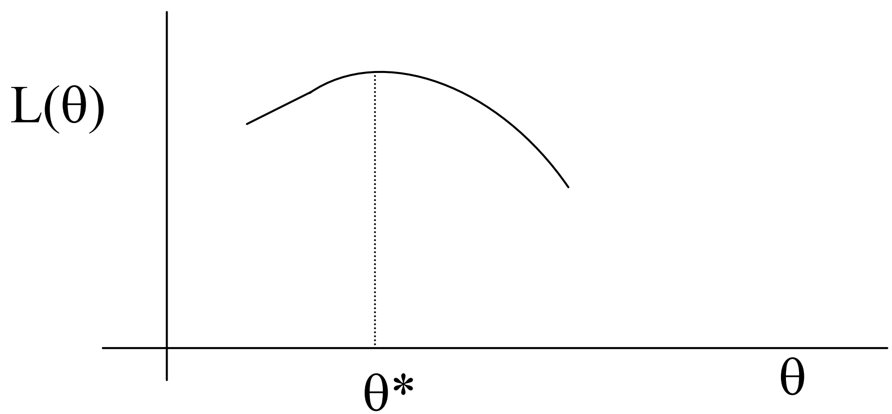
최우추정법 (Maximum Likelihood Estimation)

- 확률밀도함수 f(t; θ), θ: parameter(s)
- Data: $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

- 우도함수 (likelihood function)

$$L(\theta; data) = f(t_1;\theta) f(t_2;\theta) \cdots f(t_n;\theta)$$

- 최우추정법: 우도함수를 최대화하는 모수 θ 값 결정



데이터 종류와 우도함수

- 완전고장데이터 **(complete or uncensored data)**

$$L(\theta;data)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\theta)$$

- 정시고장데이터 **(type I censored data)**

$$L(\theta;data)=\prod_{i=1}^{r} f(t_i;\theta)\left[R(T;\theta)\right]^{n-r}$$ (r: T까지의 고장 부품수)

- 정수고장데이터 **(type II censored data)**

$$L(\theta;data)=\prod_{i=1}^{r} f(t_i;\theta)\left[R(y_r;\theta)\right]^{n-r}$$ (y_r : r번째 부품의 고장시간)

지수분포 모수의 최우추정

$$f(t;\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0$$

- 완전고장데이터

$$L(\lambda; data) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda t_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i}$$

$$\ln L(\lambda; data) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} t_i = 0$$

$$\boxed{\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = \frac{1}{\bar{t}}}$$

지수분포 모수의 최우추정 (계속)

- 정시고장데이터 **(type I censored data)**

$$L(\lambda; data) = \left(e^{-\lambda T}\right)^{n-r} \prod_{i=1}^{r} \lambda e^{-\lambda t_i} = e^{-(n-r)\lambda T} \lambda^r e^{-\lambda \sum_{i=1}^{r} t_i}$$

$$\ln L = -(n-r)\lambda T + r \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{r} t_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -(n-r)T + \frac{r}{\lambda} - \sum_{i=1}^{r} t_i = 0$$

$$\boxed{\hat{\lambda} = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)T}}$$

- 정수고장데이터 **(type II censored data)**

$$\boxed{\hat{\lambda} = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)y_r}}$$

$\hat{\lambda}$ =고장수/총시험시간

와이블분포 모수의 최우추정

$$f(t;\alpha,\lambda)=\alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^{\alpha}}, \qquad t\ge 0$$

- 완전고장데이터

$$L(\alpha,\lambda;data)=\prod_{i=1}^{n}\alpha\lambda(\lambda t_i)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t_i)^{\alpha}}=\alpha^n\lambda^{n\alpha}\prod_{i=1}^{n}t_i^{\alpha-1}e^{-\lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\alpha}}$$

$$\ln L=n\ln\alpha+n\alpha\ln\lambda+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln t_i-\lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\alpha}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\alpha}=\dfrac{n}{\alpha}+n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln t_i-\lambda^{\alpha}\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i^{\alpha}-\lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\alpha}\ln t_i=0\\[2ex]\dfrac{\partial\ln L}{\partial\lambda}=\dfrac{n\alpha}{\lambda}-\alpha\lambda^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\alpha}=0\end{cases}$$

$$\hat{\lambda}^{\alpha}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}t_i^{\alpha}}$$

α=0.1, 0.2, … 에 대해

$\hat{\lambda}^{\alpha}=\dfrac{n}{\sum t_i^{\alpha}}$ 산출

lnL이 최대가 되는 (α, λ) 결정

와이블분포 모수의 최우추정 (계속)

- 정시고장데이터 **(type I censored data)**

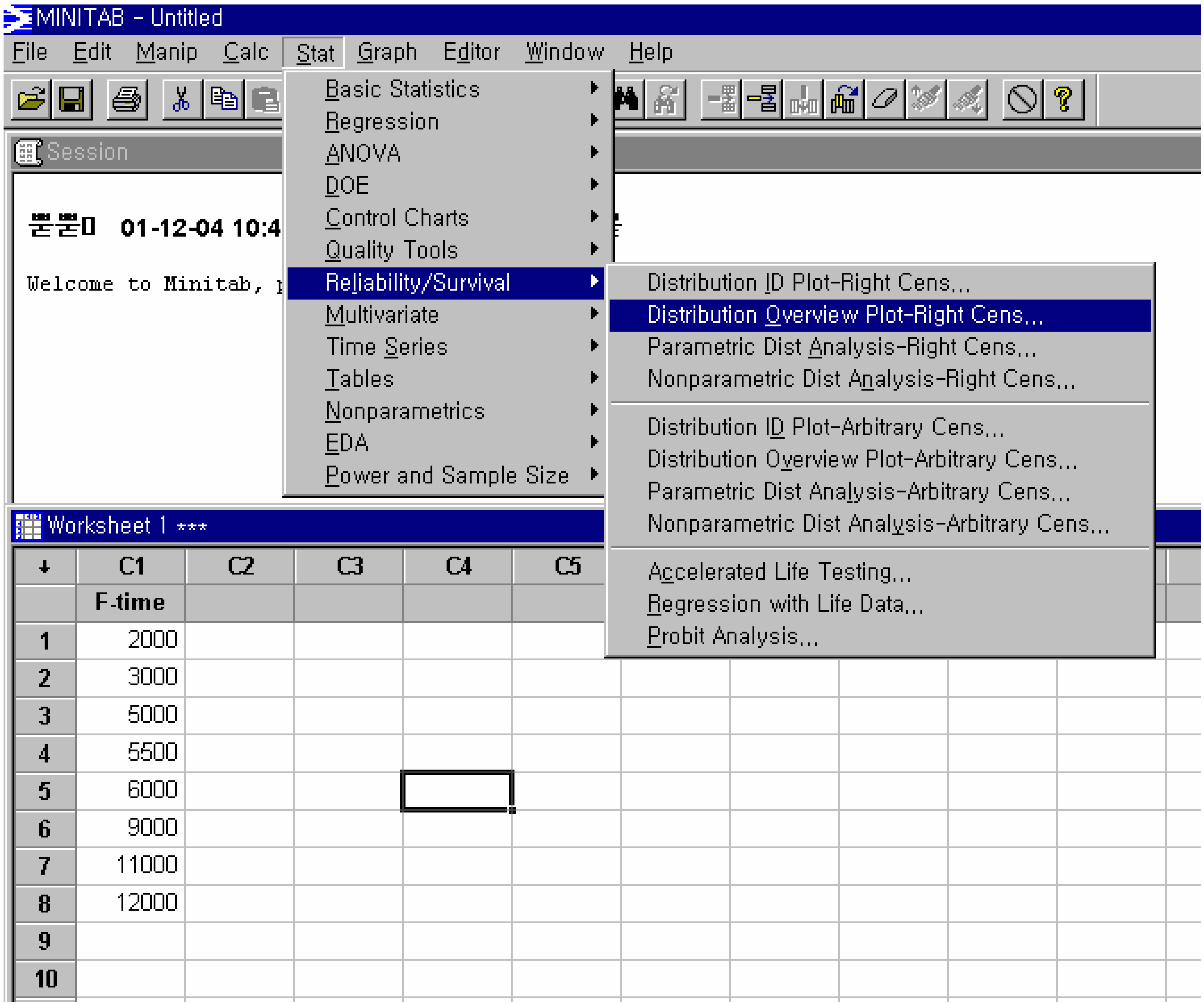
$$L(\alpha,\lambda;data)=\alpha^{r}\lambda^{r\alpha}\prod_{i=1}^{r}t_i^{\alpha-1}e^{-\lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{r}t_i^{\alpha}}e^{-(n-r)(\lambda T)^{\alpha}}$$

$$\ln L=r\ln\alpha+r\alpha\ln\lambda+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{r}\ln t_i-\lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{r}t_i^{\alpha}-(n-r)\lambda^{\alpha}T^{\alpha}$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\lambda}=\frac{r\alpha}{\lambda}-\alpha\lambda^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{r}t_i^{\alpha}-(n-r)\alpha\lambda^{\alpha-1}T^{\alpha}$$

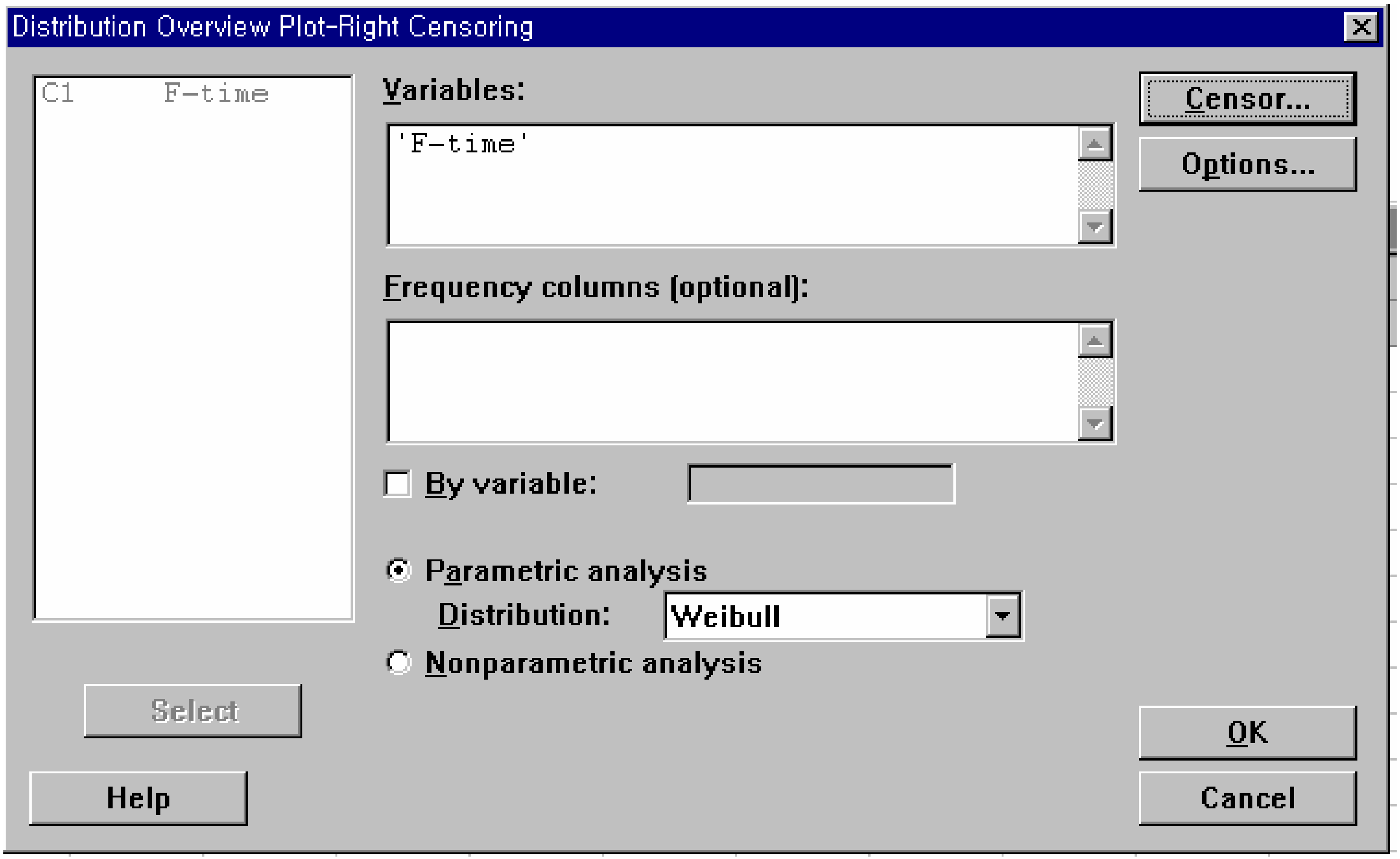
$$\hat{\lambda}^{\alpha}=\frac{r}{\sum_{i=1}^{r}t_i^{\alpha}+(n-r)T^{\alpha}}$$

Minitab에서의 분석

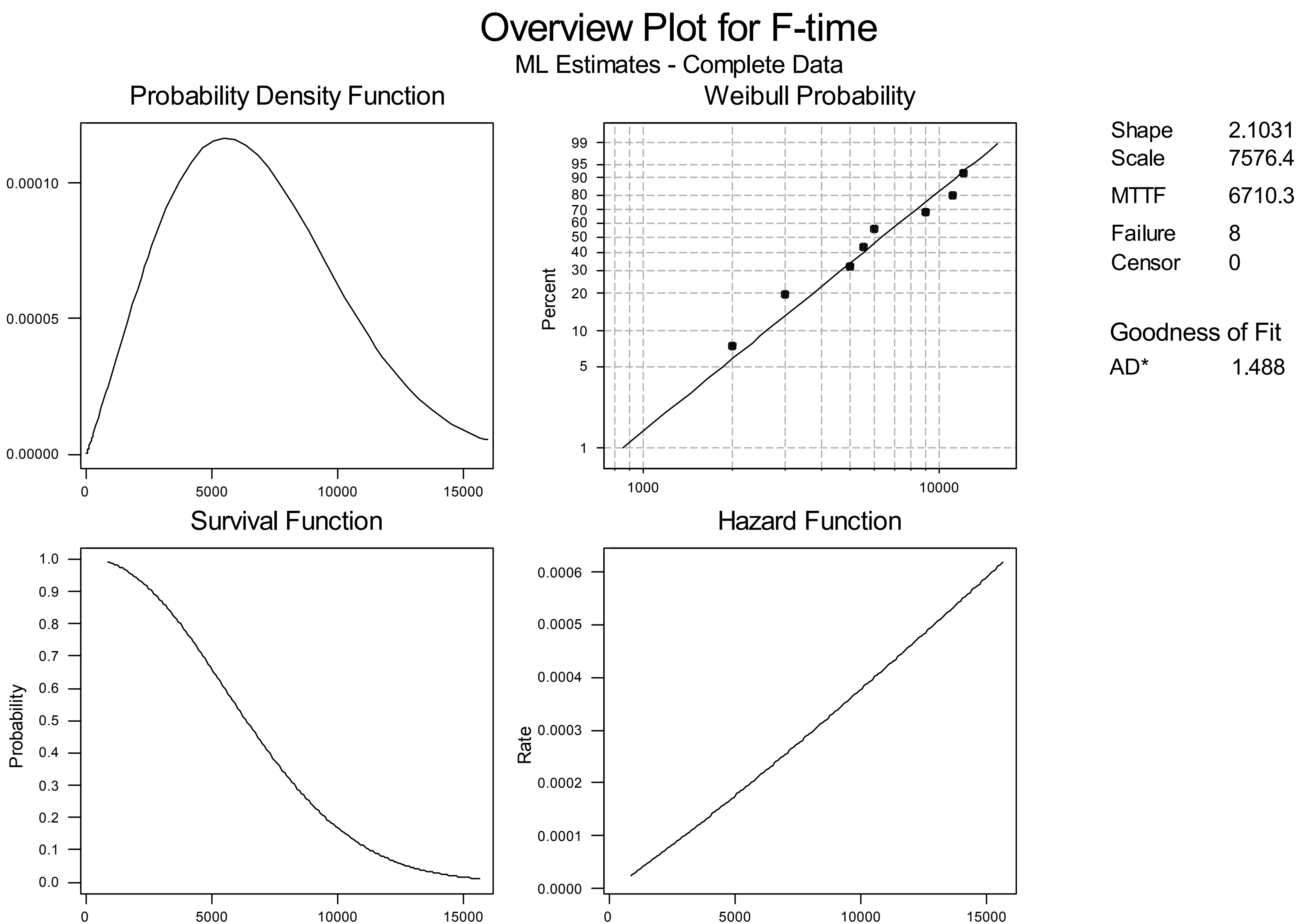


Minitab에서의 분석 (계속)

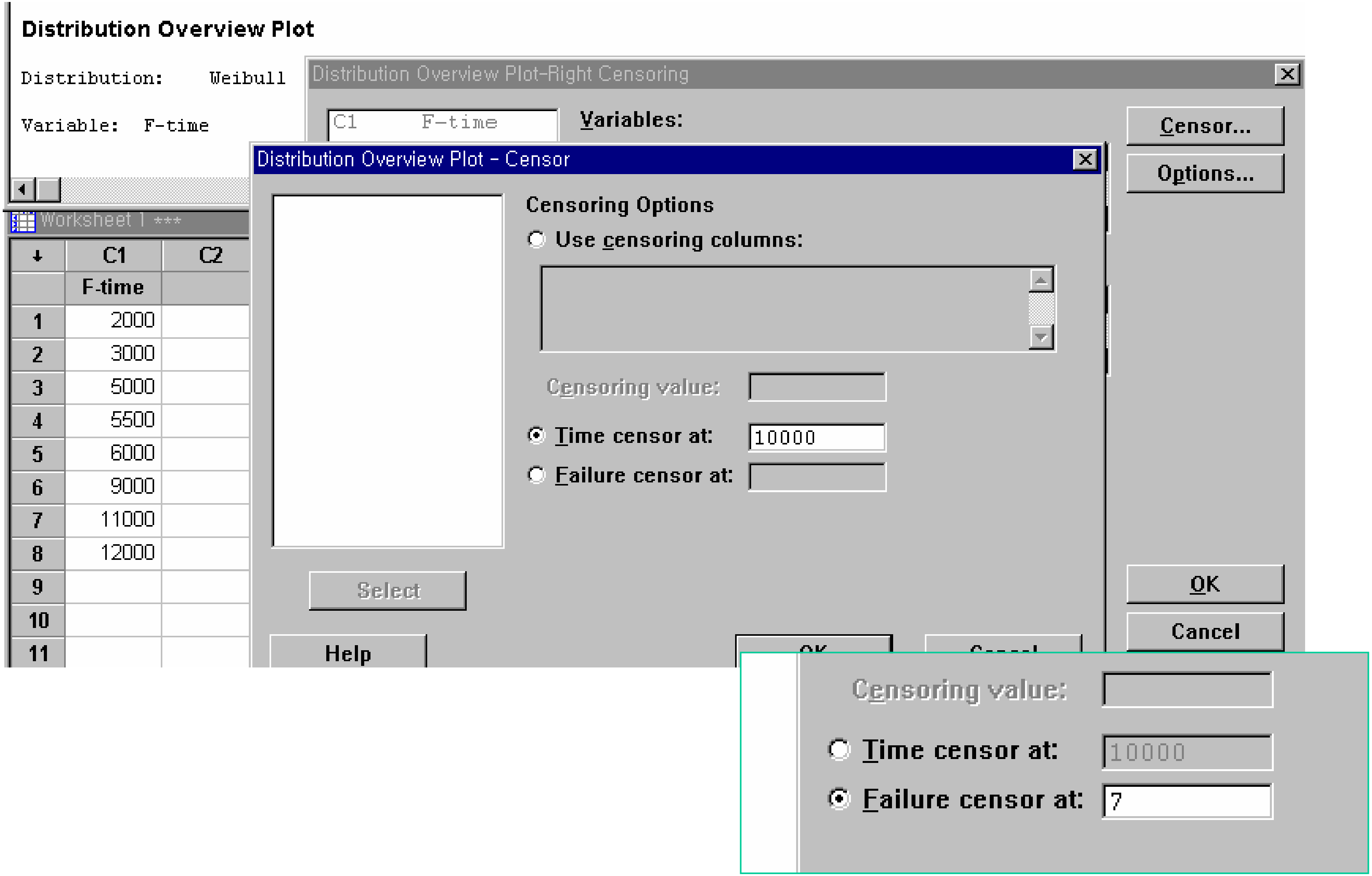
Weibull, uncensored Case



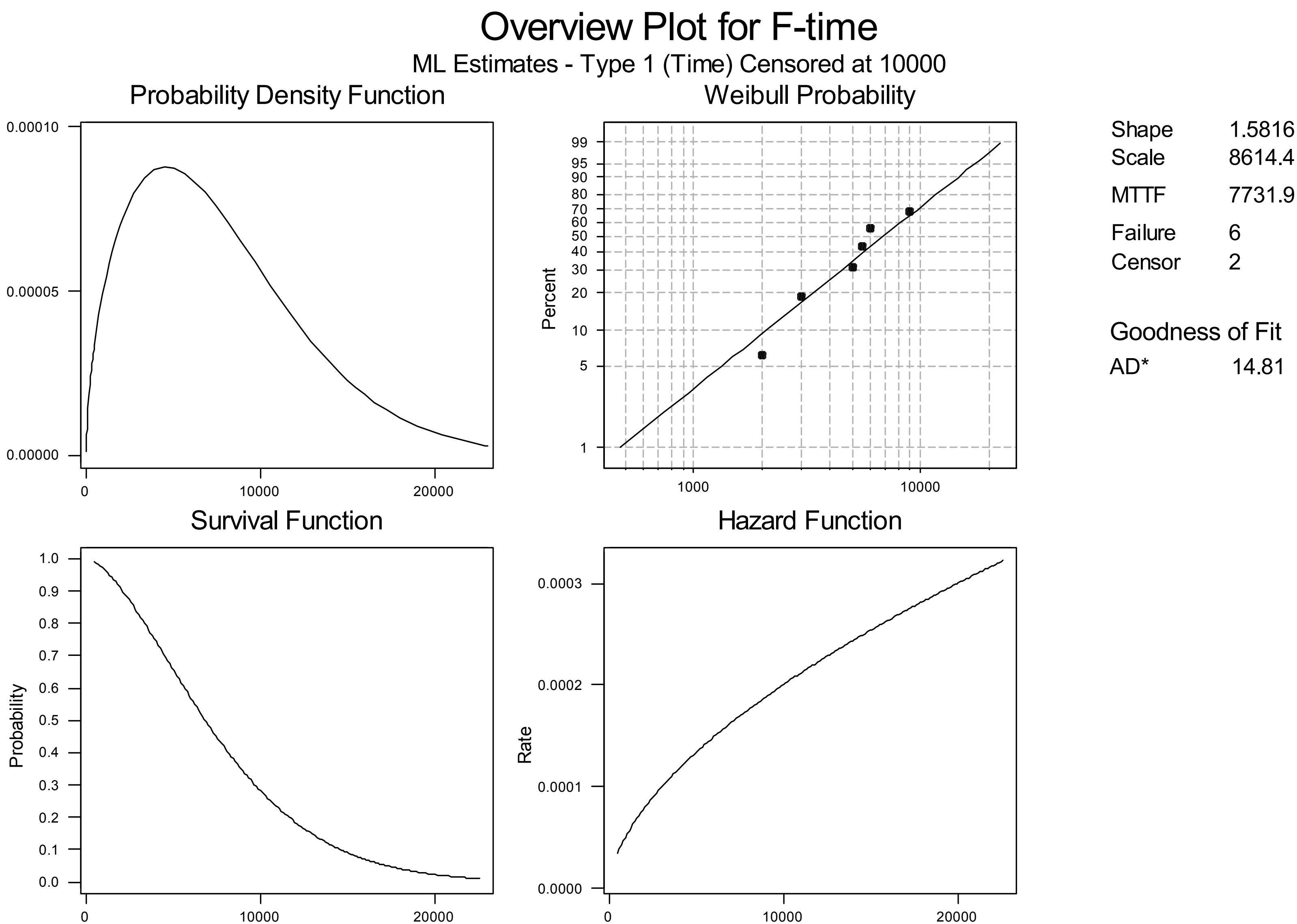
Minitab 분석 결과 – Weibull, Uncensored Case



Censoring Options



Minitab 분석결과 – Weibull, type I censored



Minitab 분석결과 – Weibull, type II censored