

# Grundlagen der Differentialgeometrie

Heinz Gründemann



# Vorwort

Meist ist es die Form eines allgemeinen Gegenstandes unserer Anschauung, die zu beschreiben ist, bevor es an die Analyse anderer Eigenschaften geht. Grundlegende Kenntnisse der Geometrie im Allgemeinen und der Differentialgeometrie im Besonderen sind deshalb für jeden Ingenieur und Naturwissenschaftler unabdingbar und sollten fester Bestandteil seiner Ausbildung sein. Dem Lernenden stehen auf dem weit gefächerten Gebiet der Differentialgeometrie hervorragende Lehrbücher zur Verfügung, die meist von einem modernen auf dem Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten aufbauenden Standpunkt an dieses Thema herangehen.

Dieser Text ist aus einem Skript zu einer einsemestrigen Veranstaltungsreihe mit zwei eineinhalb-stündigen Vorlesungen pro Woche hervorgegangen. Zum Zuhörerkreis gehörten angehende Techno-Mathematiker und Ingenieure des Maschinenbaues höherer Semester. Werden innerhalb dieses Zeitrahmens noch Übungen durchgeführt, so ist damit sicher die Grenze des Machbaren erreicht.

Zu einigen Kernsätzen sind auch die Beweise mit angegeben, da diese ein tieferes Verständnis der Zusammenhänge fördern. Die Aufgaben zu den beiden Hauptkomplexen können auch als zusätzliche Beispiele angesehen werden. Der Leser sollte aber trotzdem zunächst an eine selbständige Lösung herangehen, bevor er die ausführlichen Lösungen im Anhang konsultiert.

Frankenberg im Februar 2011

Heinz Gründemann



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1. EUKLIDischer Raum . . . . .	7
2.2. Reziproke Basen . . . . .	16
2.3. Topologie EUKLIDischer Räume . . . . .	18
2.4. Abbildungen und Funktionen . . . . .	20
<b>3. Kurven</b>	<b>25</b>
3.1. Definitionen und Parameterdarstellung . . . . .	25
3.2. Bogenelement und Bogenlänge . . . . .	31
3.3. Begleitendes Dreibein und Krümmung . . . . .	33
3.4. FRENETsche Formeln und Torsion . . . . .	38
3.5. Hauptsatz der Kurventheorie . . . . .	42
3.6. Ebene Kurven . . . . .	45
3.7. Evolute und Evolvente . . . . .	53
3.8. Globale Theorie ebener Kurven . . . . .	57
3.9. Aufgaben . . . . .	63
<b>4. Flächen</b>	<b>67</b>
4.1. Definitionen und Parameterdarstellung . . . . .	68
4.2. Tangentialraum und Einheitsnormalenfeld . . . . .	72
4.3. Erste metrische Fundamentalform . . . . .	80
4.4. Zweite metrische Fundamentalform . . . . .	83
4.5. Krümmung . . . . .	86
4.6. Ableitungsgleichungen . . . . .	96
4.7. Hauptsatz der Flächentheorie . . . . .	101
4.8. Geodäten . . . . .	104
4.9. Ausgewählte Flächen . . . . .	112
4.10. Minimalflächen . . . . .	120
4.11. Flächenabwicklung . . . . .	124
4.12. Satz von GAUß und BONNET . . . . .	129
4.13. Aufgaben . . . . .	136
<b>A. Anhang</b>	<b>141</b>
A.1. Lösungen zu den Aufgaben aus 3.9 . . . . .	141
A.2. Lösungen zu den Aufgaben aus 4.13 . . . . .	148
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>159</b>

**Stichwortverzeichnis****161**

# 1. Einführung

In direkter Übersetzung aus dem Griechischen bedeutet Geometrie Landvermessung. In diesem ursprünglichen Sinne ist Geometrie mit der Einführung eines Maßes - einer Metrik - verbunden, mit der man Längen und Winkel mißt und diese Größen damit der Zahlenarithmetik zugänglich macht. Heute fasst man den Begriff Geometrie aber sehr viel weiter und verbindet damit nicht nur die Vermessung, sondern auch die Beschreibung des Raumes und der in ihm enthaltenen unübersehbaren Formenvielfalt, die sich materiell durch Figuren und Körper sowie deren Veränderungen manifestiert. Um dieser Vielfalt Herr zu werden ist es notwendig, an den Anfang jeder konkreten Theorie zur Geometrie gewisse allgemein akzeptierte elementare Bedingungen (die Axiome) zu stellen. Es geht in der Regel aber nicht um eine umfassende und detaillierte Beschreibung der Dinge, sondern um die Aufdeckung von Gemeinsamkeiten verschiedener geometrischer Objekte - man spricht dann von Invarianzen oder Isometrien. Diese werden durch die Eigenschaften von Abbildungen oder Transformationen zwischen den Objekten sichtbar und führen zu einer Algebraisierung der Geometrie. Eine auf algebraischen Prinzipien beruhende Systematisierung der Geometrie wurde von Felix KLEIN 1872 in seinem Erlanger Programm vorgestellt und bildet seitdem die methodische Grundlage zum Studium der Geometrie.

Die erste umfassende Theorie zur Geometrie wurde von EUKLID in seinem Werk "Die Elemente" dargelegt und ist bis heute Bestandteil der Schulmathematik. Diese EUKLIDische Geometrie ist in ihrem Kern auf das Studium von Geraden und Ebenen im Raum sowie deren Invarianzen unter bestimmten Transformationen gerichtet. Zu diesen Invarianzen gehören Kongruenz- und Ähnlichkeitsaussagen sowie Invarianz bei Drehung/Spiegelung und gewissen affinen Transformationen. Dies ändert nichts an der Tatsache, dass auch gekrümmte Objekte beschrieben werden. Alles ist aber eingebettet in einen unendlich ausgedehnten isotropen und homogenen Raum, in dem die affinen Transformationen als Quellen invarianter Abbildungen in Erscheinung treten. Bezogen auf physikalische Vorgänge kann die EUKLIDische Geometrie als die Geometrie der NEWTONschen Mechanik angesehen werden.

Bernhard RIEMANN entwickelte ein viel weiter gefasstes Konzept einer Geometrie auf der Basis differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, welches mehr Gestaltungsmöglichkeiten für den umgebenden Raum zulässt und die EUKLIDische Geometrie als Spezialfall enthält. Die sich im Allgemeinen von Punkt zu Punkt ändernden metrischen Verhältnisse in "gekrümmten Räumen" werden durch einen metrischen Fundamentaltensor beschrieben. Die Gerade als kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte im EUKLIDischen Raum wird verallgemeinert zur Geodäte als ebenfalls kürzester Verbindungslinie zwischen Punkten eines RIEMANNschen Raumes.

Man kann die Differentialgeometrie, um die es hier geht, an der Nahtstelle zwischen der elementaren EUKLIDischen Geometrie und der RIEMANNschen Geometrie ansiedeln. Durch Einbeziehung der Differential- und Integralrechnung sowie dem damit verbundenen Begriff des Grenzwertes in die EUKLIDische Geometrie wird es möglich, "gekrümmte geometrische Objekte" zum einen lokal (bezogen auf Umgebungen einzelner Punkte) zu studieren und zum anderen deren Ausdehnung (Längen, Inhalte,...) zu berechnen. Gleichzeitig wird in der klassischen Differentialgeometrie aber auch der Weg sichtbar, der eingeschlagen werden muss hin zu einer Geometrie gekrümmter Räume. Im Folgenden wird ein Überblick zum Inhalt und zu den Schwerpunkten einer Differentialgeometrie der Kurven und Flächen gegeben.

### **Was ist Differentialgeometrie und wozu ist sie brauchbar?**

In der klassischen Differentialgeometrie geht es um die Beschreibung und Untersuchung von Kurven und Flächen im dreidimensionalen EUKLIDischen Raum. Wie in der Geometrie im Allgemeinen so auch in der Differentialgeometrie sind die Untersuchungsobjekte von einem hohen Grad an Anschaulichkeit geprägt. Man hat meist ein Bild der Geometrie eines Gegenstandes vor Augen, das jetzt durch ein gewisses Maß an elementarer Analysis zu ergänzen ist. Allerdings gestaltet sich die praktische Umsetzung oft sehr mühsam, da man es in der Regel mit vielen Indizes und mehrfach verketteten partiellen Ableitungen zu tun hat, was zu einer umfangreichen Rechenarbeit führen kann. Dazu stehen aber heute Computer-Algebra-Systeme zur Verfügung (siehe [Gray] oder [RKP]), die das formale Rechnen bedeutend vereinfachen. Außerdem entschädigt der zu erwartende Gewinn für so manche Rechenmühe, denn nahezu unüberschaubar sind die Gebiete aus Naturwissenschaft und Technik, in denen die Differentialgeometrie zu einem nützlichen und oftmals unentbehrlichen Darstellungs- und Untersuchungswerkzeug geworden ist. Eine keineswegs vollständige Auswahl von Applikationsfeldern soll hier stichpunktartig genannt werden:

- Kinematische Beschreibung der Bewegung allgemeiner materieller Objekte durch Kurven oder "Schläuche" im Raum (z.B. Bahnkurven von Flugobjekten, Raumsonden, Fahrzeugen, Bewegungsabläufe technischer Aggregate (Roboter) und im Sport, kinematische Grundlage zur allgemeinen Mehrkörperdynamik).
- Zeitliche und räumliche Veränderungen allgemeiner materieller Objekte unter dem Einfluß äußerer Einwirkungen (Dynamik), z.B. die Deformation von 2D- oder 3D-Bauteilen unter dem Einfluß von Kräften, technologische Verfahren der Umformung und plastischen Verformung.
- Hydro- und Aerodynamik (geometrische Beschreibung von Strömungsfeldern, insbesondere Anwendungen aus der Meteorologie, der Hydrologie und Diffusions-/Migrationsstheorie)
- Aus historischer Sicht war die Geodäsie ein Ausgangspunkt für die Entwicklung der Differentialgeometrie (C.F. GAUß). Auch heute noch bildet die Differentialgeometrie die theoretische Basis der Erd- und Gebäudevermessung und natürlich der Kartografie.

Moderne Kommunikations- und Navigationstechniken (z.B. GPS) benutzen als technologische Basis die Satellitengeodäsie, deren theoretische Grundlage eine anspruchsvolle, weit über den hier abgesteckten Rahmen hinausgehende Differenzialgeometrie ist.

- Konstruktions- und Simulationsprozesse im allgemeinen Maschinen-/Anlagenbau, Fahrzeugbau und in Architektur/Bauwesen werden heute in der Regel mittels CA-Techniken virtuell auf dem Rechner vorbereitet und realisiert. Die softwareseitige Umsetzung erfordert tiefe Einblicke in differenzialgeometrische Zusammenhänge.

Kommen wir zu einem Überblick zum Inhalt und zu den Kernaussagen der hier dargebotenen Differenzialgeometrie. Ausgegangen wird stets von hinreichend glatten Kurven und Flächen, d.h. solchen Objekten, die lokal eine Linearisierung erlauben. Unter diesen Bedingungen kann, abgesehen von gewissen singulären Punkten, an jedem Kurvenpunkt eine Tangente und an jedem Flächenpunkt eine Tangentialebene angeheftet werden. Dies ist gewöhnlich die Voraussetzung, die der klassischen Differenzialgeometrie zugrunde liegt und die auf die Beschreibung der lokalen Struktur geometrischer Objekte gerichtet ist. Lokal bedeutet in diesem Zusammenhang stets, dass sich alle Größen zur Charakterisierung von Kurven und Flächen als Funktionen der Objektpunkte darstellen lassen. Demgegenüber spricht man von einer globalen Beschreibung oder Theorie, wenn es um Eigenschaften geometrischer Strukturen geht, die nicht von den einzelnen Strukturpunkten, sondern von der topologischen Charakteristik abhängen.

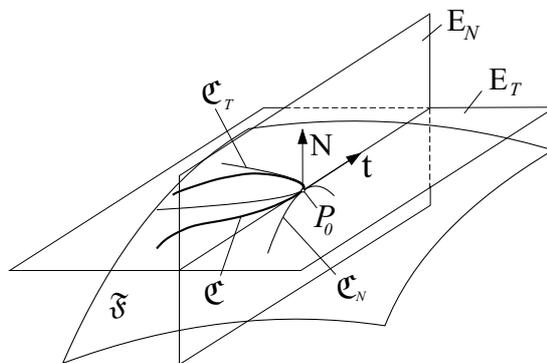
Zu den Grundbegriffen der Theorie der Kurven gehören das begleitende Dreibein und die FRENETschen Ableitungsformeln. Diese letztgenannten Formeln sind Bestandteil des Hauptsatzes der Kurventheorie, in dem Bedingungen formuliert werden, unter denen bei vorgegebener Kurvenkrümmung und -torsion über die Lösung eines Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen die Parameterdarstellung einer Kurve rekonstruierbar ist. Damit ist die lokale Kurventheorie im wesentlichen umrissen. Die hier für 2D- und 3D-Kurven präsentierten Definitionen sowie die daraus abgeleiteten Ergebnisse lassen sich ohne bedeutenden technischen Mehraufwand auf Kurven im  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 3$ ) verallgemeinern. Die Beschreibung der globalen Struktur geschlossener ebener Kurven basiert auf den Begriffen Totalkrümmung und Umlaufszahl und mündet im HOPFschen Umlaufsatz. Eine Weiterführung zur Theorie der Knoten würde den Rahmen dieser Einführung sprengen.

Offensichtlich ist die Geometrie der Flächen weitaus reichhaltiger als jene der Kurven. Die metrischen Verhältnisse auf Flächen und deren Einbettung in den umgebenden Raum werden im wesentlichen durch zwei Fundamentalgrößen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{L}$  beschrieben. Beide Größen sind in einer speziellen Flächenparametrisierung durch  $2 \times 2$ -Matrizen darstellbar.

Die 1. metrische Fundamentalgröße  $\mathbf{G}$  und die aus ihr hervorgehende Bilinearform definieren die metrische Struktur einer Fläche selbst als zweidimensionales Gebilde. Mit diesen Größen messen "Flachländer" Längen und Winkel zwischen Flächenpunkten. Als Flachländer oder Flächenbewohner werden im Folgenden zur anschaulichen geometrischen Deutung fiktive zweidimensionale Individuen bezeichnet, die nur auf Flächen

existieren und den umgebenden Raum nicht wahrnehmen können. Die 1. metrische Fundamentalgröße bestimmt außerdem die Flächenelemente und durch Integration über diese den Inhalt einer Fläche. Alle Begriffe, Beziehungen und Parameter, die eine Fläche charakterisieren und sich ausschließlich auf  $\mathbf{G}$  zurückführen lassen, werden als innergeometrisch (d.h. zur inneren Geometrie gehörend) definiert. Mit diesen Größen gehen Flachländer um. Als Erdbewohner nehmen wir z.B. die sphärische Gestalt unseres Planeten gewöhnlich gar nicht wahr und wähen uns als Flachländer auf einer weit ausgedehnten Ebene. Alle Entfernung- und Winkelmessungen oder Flächeninhaltsbestimmungen, die sich nur auf die Erdoberfläche beziehen, sind deshalb innergeometrische Größen des Erdgeoids. Dass es dabei zu unverhofften Ergebnissen kommen kann, zeigt das folgende einfache Beispiel: Trägt man ausgehend von einem festen Erdpunkt  $P_0$  eine Strecke von z.B. 50 km konsequent nach Norden gerichtet ab und anschließend vom erreichten Endpunkt weiter fortfahrend ebenfalls eine Strecke von 50 km diesmal konsequent nach Westen gerichtet ab, so wird man bei Durchführung dieser Streckenabtragung in umgekehrter Reihenfolge (also von  $P_0$  beginnend erst 50 km nach Westen dann 50 km nach Norden) gegenüber der ersten Längenabtragung in einem anderen Erdpunkt landen. Auf einer idealen Ebene kommt so etwas nicht vor. Unabhängig von der Reihenfolge der Längenabtragungen wird man stets im gleichen Punkt ankommen. Die Ursache dafür, dass es auf einer Kugeloberfläche nicht so ist, liegt an ihrer Krümmung. Von zentraler Bedeutung für die lokale Flächentheorie ist deshalb der Krümmungsbegriff.

Die Krümmung einer Fläche, von der jeder eine intuitive Vorstellung hat, wird letztlich auf die Krümmung von Kurven, die nur auf der Fläche verlaufen (Flächenkurven) zurückgeführt. Zur näheren Erläuterung dessen sei  $P_0$  ein Flächenpunkt der Fläche  $\mathfrak{F}$ , in dem die Tangentialebene  $\mathbf{E}_T$  an  $\mathfrak{F}$  eindeutig bestimmt ist (siehe Abb. 1.1). Weiter verlaufe durch  $P_0$  eine glatte Flächenkurve  $\mathfrak{C}$  mit eindeutig bestimmtem Tangentenvektor  $\mathbf{t}$  im Punkt  $P_0$ . Die Tangentialebene ist durch ihren Normalenvektor  $\mathbf{N}$  bestimmt, der gleichzeitig auch Normalenvektor an  $\mathfrak{F}$  im Punkt  $P_0$  ist. Durch den Tangentenvektor  $\mathbf{t}$  und Normalenvektor  $\mathbf{N}$  wird die zur Tangentialebene senkrecht stehende Ebene  $\mathbf{E}_N$  aufgespannt (Vorsicht! Dies ist i. A. weder die Normalebene noch die Schmiegeebene der Kurve  $\mathfrak{C}$ .) Die Kurve  $\mathfrak{C}$  projiziert man nun jeweils orthogonal auf  $\mathbf{E}_T$  und  $\mathbf{E}_N$ . Diese Projektionen ergeben ebene Kurven  $\mathfrak{C}_T$  und  $\mathfrak{C}_N$ . Die Krümmung der Fläche  $\mathfrak{F}$  im Punkt  $P_0$  bezogen auf die Kurve  $\mathfrak{C}$  wird nun durch die Krümmungen der beiden Kurven  $\mathfrak{C}_T$  und  $\mathfrak{C}_N$  im Punkt  $P_0$  beschrieben.



Die Krümmung  $k_g$  von  $\mathfrak{C}_T$  in  $P_0$  nennt man geodätische Krümmung und die Krümmung

$k_n$  von  $\mathfrak{C}_N$  in  $P_0$  heißt Normalkrümmung. Da  $\mathfrak{C}_T$  in der Tangentialebene liegt, ist  $k_g$  die Krümmung, die Flachländer als Krümmung der Flächenkurve  $\mathfrak{C}$  wahrnehmen. Aus diesem Grund ist  $k_g$  eine Größe der inneren Flächengeometrie.  $k_n$  hingegen beschreibt die Krümmung der Fläche eingebettet in den umgebenden Raum und steht in direkter Beziehung zum Normalenvektor  $\mathbf{N}$ . Flachländer sind nicht in der Lage,  $k_n$  zu beobachten, weshalb man  $k_n$  der äußeren Geometrie der Fläche zuordnen muss, die von der 2. metrischen Fundamentalgröße  $\mathbf{L}$  beherrscht wird. Die Normalkrümmung ist direkt aus der  $\mathbf{L}$  zugeordneten Bilinearform berechenbar und besitzt den gleichen Wert für alle Flächenkurven durch  $P_0$  mit gleichem Tangentenvektor  $\mathbf{t}$  in diesem Punkt. Darunter gibt es genau eine Kurve, die gleich ihrer Projektion auf die Ebene  $\mathbf{E}_N$  ist, für die also die geodätische Krümmung  $k_g$  verschwindet und demzufolge auch die Normalkrümmung gleich der Kurvenkrümmung ist. Diese Flächenkurve heißt geodätische Linie oder einfach Geodäte durch den Punkt  $P_0$  in Richtung der Tangente  $\mathbf{t}$ . Flachländer nehmen diese Kurve als Gerade auf ihrer Fläche wahr, da sie keine Krümmung feststellen. Die Geodäten einer Fläche sind also die auf ihr verlaufenden "Geraden". Die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf einer Fläche ist stets eine Geodäte. Ebenso wie die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene deren Verbindungsgerade ist. Die Geodäten auf einer Kugel sind deren Großkreise. Demzufolge sind z.B. die Längengrade oder der Äquator der Erdoberfläche Geodäten. Längs eines Breitenkreises, der nicht mit dem Äquator zusammenfällt, bewegt man sich (immer auf die Oberfläche bezogen) als Flachländer schon auf einer gekrümmten Linie. Dies wird besonders augenscheinlich, wenn der Breitenkreis nicht weit von einem der Pole entfernt ist.

Mit  $k_n$  wird die Krümmung einer Fläche in einem festen Punkt bezogen auf eine Kurve  $\mathfrak{C}$  beschrieben, deshalb ist  $k_n$  nur vom Punkt  $P_0$  und dem Tangentenvektor  $\mathbf{t}$  in  $P_0$ , aber nicht vom sonstigen Verlauf der Kurve abhängig. Gibt man sich in  $P_0$  einen anderen Vektor aus der Tangentialebene vor, so erhält man mit  $k_n$  die Normalkrümmung einer Flächenkurve durch  $P_0$ , deren Tangentenvektor gerade dieser vorgegebene Vektor ist. Jeder tangentialen Richtung in  $P_0$  kann somit eine Normalkrümmung zugeordnet werden. Alle diese tangentialen Richtungen und deren zugeordnete Normalkrümmungen sind auf zwei Hauptkrümmungsrichtungen  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  mit den (extremen) Hauptkrümmungen  $\lambda_1, \lambda_2$  zurückführbar. Dies ist ein Problem der linearen Algebra, welches letztlich auf die Lösung des verallgemeinerten Eigenwertproblems  $(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{G}) \mathbf{v} = \mathbf{0}$  mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2$  und Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  führt (aus  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  folgt sofort  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ). Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen zusammen mit der mittleren Krümmung  $H = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$  und der GAUßschen Krümmung  $K = \lambda_1 \lambda_2$  sind invariant gegenüber der Flächenparametrisierung. Während  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $H$  Größen der äußeren Flächengeometrie sind, kann  $K$  allein aus der 1. metrischen Fundamentalgröße berechnet werden (und gehört damit zur inneren Geometrie). Dieses erstaunliche Resultat wurde erstmals von GAUß in seinem berühmten Theorema egregium bewiesen.

Analog zu den FRENETschen Gleichungen der Kurventheorie gibt es in der Flächentheorie die Ableitungsgleichungen von GAUß und WEINGARTEN. Allerdings gelingt die Rekonstruktion einer Fläche allein aus diesen Gleichungen, wie dies in der Kurventheorie möglich ist, nicht. Da es sich hier um ein System partieller Differenzialgleichun-

gen 1. Ordnung handelt, sind zu dessen eindeutiger Lösung Integrabilitätsbedingungen erforderlich, die als GAUß-Gleichung und Gleichung von CODAZZI-MAINARDI bekannt sind. Einige Ausführungen zu Minimalflächen und zur Abwicklung von Flächen runden im wesentlichen die lokale Flächentheorie ab.

Mit dem Satz von GAUß und BONNET wird ein Blick auf die globale Theorie der Flächen geworfen. Dieser Satz bringt zum Ausdruck, dass das integrale Mittel über alle GAUßschen Krümmungen einer kompakten Fläche ohne Rand eine Invariante ist, die sich allein aus der topologischen Gestalt der Fläche, der sogenannten EULER-Charakteristik ergibt.

## 2. Grundlagen

In diesem Kapitel sind jene grundlegenden Definitionen, Bezeichnungen, Theoreme und daraus folgenden elementaren Aussagen der linearen Algebra und Analysis in lockerer Folge zusammengestellt, auf die im Haupttext ständig Bezug genommen wird.

### 2.1. EUKLIDISCHER RAUM

#### I. Punkte und Vektoren

Der dreidimensionale Raum  $\mathbb{R}^3$  bildet das Grundobjekt jeder klassischen Geometriebeschreibung. Dieser Raum wird gewöhnlich als kartesisches Produkt und seine Punkte demzufolge durch geordnete 3-Tupel reeller Zahlen in der Form

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ (Menge der reellen Zahlen)}\}$$

beschrieben. Dieser Darstellung liegt ein kartesisches  $(x_1, x_2, x_3)$ -Koordinatensystem zugrunde, das von drei senkrecht aufeinander stehenden reellen Zahlengeraden gebildet wird, die sich in einem Ursprungspunkt  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$  schneiden. Wenn es zweckmäßig erscheint, werden die geordneten 3-Tupel anstelle von  $(x_1, x_2, x_3)$  durch  $(x, y, z)$  bezeichnet.

Ein Anfangspunkt  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  und ein Endpunkt  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  legen eindeutig einen **Vektor**

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

fest. Andererseits ist mit einem Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  und einem Vektor  $\mathbf{v}$  eindeutig ein Punkt  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  bestimmt, so dass gilt  $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ . Dieser Zusammenhang zwischen Punkten und Vektoren bringt zum Ausdruck, dass der Anfangspunkt eines Vektors unter Beibehaltung seiner Richtung in einen anderen Punkt verschoben werden kann. Man spricht deshalb von der Möglichkeit der Parallelverschiebung von Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ .

Die Menge aller dieser Vektoren bildet einen dreidimensionalen **Vektorraum**  $\mathbf{V}^3$ , in dem eine Addition “+”

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 + v^1 \\ u^2 + v^2 \\ u^3 + v^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}^3$$

und eine Multiplikation mit reellen Zahlen

$$\alpha \mathbf{v} = \alpha \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v^1 \\ \alpha v^2 \\ \alpha v^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V}^3; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

definiert ist. Diese Rechenoperationen im  $\mathbf{V}^3$  unterliegen den üblichen Bedingungen ( $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  beliebige Vektoren aus  $\mathbf{V}^3$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ):

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	Kommutativität
$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$	Assoziativität
$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$	Existenz eines Nullvektors $\mathbf{0}$
$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	Zu jedem Vektor $\mathbf{u}$ existiert ein inverses Vektor $-\mathbf{u}$
$(\alpha + \beta) \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u}$	Distributivgesetze der Multiplikation
$\alpha (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}$	
$\alpha (\beta \mathbf{u}) = \beta (\alpha \mathbf{u}) = \alpha \beta \mathbf{u}$	Assoziativgesetz der Multiplikation
$1 \mathbf{u} = \mathbf{u}$	Einselement der Multiplikation

Gelegentlich drückt man Vektoren auch durch eine Zeile in der Form

$$\mathbf{v}^T = (v^1, v^2, v^3) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)^T \quad \text{aus.}$$

## II. Basis und Vektordarstellung

Die Vektoren  $\mathbf{g}_i = (g_i^1, g_i^2, g_i^3)^T$  ( $i = 1, 2, 3$ ) heißen **linear unabhängig**, wenn die folgende Determinante nicht verschwindet:

$$\det(\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}) = \begin{vmatrix} g_1^1 & g_2^1 & g_3^1 \\ g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 \\ g_1^3 & g_2^3 & g_3^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

In diesem Fall bilden  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  eine **Basis** im  $\mathbf{V}^3$ , d.h. jeder Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^3$  ist eindeutig als Linearkombination dieser Vektoren in der Form

$$\mathbf{v} = a^1 \mathbf{g}_1 + a^2 \mathbf{g}_2 + a^3 \mathbf{g}_3$$

darstellbar. Die reellen Zahlen  $a^1, a^2, a^3$  heißen Koordinaten des Vektors  $\mathbf{v}$  bezüglich der Basis  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  und sind aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} g_1^1 & g_2^1 & g_3^1 \\ g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 \\ g_1^3 & g_2^3 & g_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

eindeutig berechenbar.

Die Vektoren  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  heißen **linear abhängig**, wenn  $\det(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}) = 0$ .

Die Basis

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

deren Vektoren als Pfeile gedeutet vom Ursprung ausgehen und in Richtung der positiven Achsen des kartesischen Koordinatensystems weisen, heißt **Standardbasis** oder **kanonische Basis** des  $\mathbb{R}^3$ . Die zusätzliche Charakterisierung “kanonisch” tritt häufig in physikalisch/technischen Zusammenhängen mit mathematischer Prägung auf und bedeutet so viel wie “in natürlicher Weise” oder “auf direktem offensichtlichem Wege”. Ein Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^3$  gestattet in der Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  die Darstellung

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3.$$

In dieser Basis sind den Punkten  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  die sogenannten **Ortsvektoren** (hier unter Beibehaltung der Bezeichnung)

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{\mathbf{0x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

zugeordnet. Diese nach Festlegung eines kartesischen Koordinatensystems eindeutige Zuordnung zwischen Punkten und Vektoren gestattet es, beide miteinander zu identifizieren und deshalb in gleicher Weise über Punkte und Ortsvektoren zu sprechen.

Summationen über jeweils oben und unten stehende gleiche Indizes können gemäß der **EINSTEINschen Summenkonvention** abgekürzt werden. Das folgende Beispiel, in dem  $a_{ij}$  und  $b^j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) beliebige indizierte Größen sind, soll dies demonstrieren:

$$s_i = a_{i1}b^1 + a_{i2}b^2 + a_{i3}b^3 \equiv a_{ij}b^j.$$

Der Summationsindex  $j$  heißt stummer Index, da er auch durch ein anderes Symbol (z.B.  $k, l, m, \dots$ ) ersetzt werden kann. Wenn nichts anderes vermerkt ist, so durchläuft der Summationsindex hier die natürliche Zahlenfolge  $\{1, 2\}$  oder  $\{1, 2, 3\}$ .

Die Regel, nach der Indizes oben oder unten vergeben werden, ist mit der Unterscheidung zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren sowie der damit zusammenhängenden Beziehung eines Vektorraumes zu seinem dualen Raum verbunden. Auf diese tieferliegende Problematik wird hier nicht eingegangen. Die Indexstellung ist deshalb als Formalismus zur Realisierung der Summationsregel zu verstehen. Wie man einen Index hoch- bzw. herunterziehen kann, wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

### III. Metrik und inneres Produkt

Mit den Operationen “+” und “.” ist im  $\mathbf{V}^3$  lediglich eine Arithmetik definiert. Metrische Größen, z.B. Längen, Winkel, Inhalte, ... sind damit aber noch nicht berechenbar. Um Geometrie betreiben zu können ist im  $\mathbb{R}^3$  ein Abstand und verträglich dazu im  $\mathbf{V}^3$  ein Maß einzuführen.

Ausgangspunkt dazu ist eine Abbildung  $(\cdot, \cdot) : \mathbf{V}^3 \times \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , die jedem Vektorpaar  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  aus  $\mathbf{V}^3$  eine reelle Zahl  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  zuordnet und zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt

(  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}^3$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  beliebig ):

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad (\text{Linearität})$$

Eine derartige Abbildung, die auf Grund der Symmetrie in beiden Argumenten linear ist, heißt **bilineare Abbildung**. Ist die bilineare Abbildung **positiv definit**, d.h. gilt

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{V}^3 \text{ mit } \mathbf{v} \neq \mathbf{0},$$

so bildet  $(\cdot, \cdot)$  auf  $\mathbf{V}^3$  ein **inneres Produkt** (bzw. **skalares Produkt**).

Mit der Festlegung der inneren Produkte der Vektoren der Standardbasis

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

ist das innere Produkt für beliebige Vektoren  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j$  schon definiert:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u^i \mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j) = u^i v^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3.$$

Sind  $\mathbf{u} = a^i \mathbf{g}_i$ ,  $\mathbf{v} = b^j \mathbf{g}_j$  in einer beliebigen anderen Basis  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  dargestellt, so erhält man mit

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (a^i \mathbf{g}_i, b^j \mathbf{g}_j) = a^i b^j (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$$

natürlich den gleichen numerischen Wert. Mit  $\mathbf{g}_i = g_i^j \mathbf{e}_j$  sind die inneren Produkte  $(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$  auf jene der Standardbasis zurückführbar.

Mit den inneren Produkten wird im  $\mathbb{R}^3$  der EUKLIDISCHE Abstand

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \quad \text{mit } \mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{xy}} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix}$$

der Punkte  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  und  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  definiert. Mit diesem Abstand ist auch die Länge des die beiden Punkte verbindenden Vektors  $\mathbf{v}$ , die man **Norm**  $\|\cdot\|$  nennt, gegeben:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{V}^3.$$

Über die Eigenschaften des inneren Produktes sind für die Vektornorm folgende Merkmale ableitbar:

$$\|\mathbf{v}\| > 0 \quad \text{für alle } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{Positivität der Norm})$$

$$\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\| \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{Homogenität der Norm})$$

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

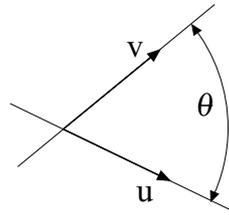
Ein Vektor  $\mathbf{u}$  mit  $\|\mathbf{u}\| = 1$  heißt **Einheitsvektor**. Die Vektoren der Standardbasis sind wegen  $\|\mathbf{e}_i\| = \sqrt{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)} = 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) Einheitsvektoren. Jeder Vektor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

kann durch Multiplikation mit  $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}$  in einen Einheitsvektor  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$  überführt werden.

Das innere Produkt der Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  ist über deren Normen auch aus der Formel

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta)$$

$$\theta = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$



berechenbar, wobei  $\theta$  den Winkel bezeichnet, den die Richtungsgeraden von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  einschließen.

Die Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  heißen **orthogonal** zueinander, wenn ihr inneres Produkt  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  ist und drückt dies symbolisch durch  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$  aus. Für  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  schließen die beiden Vektoren dann einen rechten Winkel ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) ein.

Die Basis  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  heißt orthogonal, wenn  $(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j) = 0$  für  $i \neq j$  und orthonormal, wenn außerdem  $(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i) = 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Die Standardbasis bildet z.B. eine orthonormale Basis im  $\mathbf{V}^3$ . In einer orthonormalen Basis hat jeder Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^3$  die Darstellung

$$\mathbf{v} = a^i \mathbf{g}_i \quad \text{mit} \quad a^i = (\mathbf{v}, \mathbf{g}_i) \quad i = 1, 2, 3.$$

#### IV. EUKLIDische Räume $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$

Der  $\mathbb{R}^3$  zusammen mit dem Vektorraum  $\mathbf{V}^3$  und dem in diesem definierten inneren Produkt  $(\cdot, \cdot)$  heißt dreidimensionaler **EUKLIDischer Raum**. Dieser Raum wird hier weiterhin mit  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet, dabei aber wohlwissend, was damit verbunden ist. Den Vektorraum  $\mathbf{V}^3$  bezeichnet man als **Translationsraum** ( bzw. Tangentialraum ) des EUKLIDischen Raumes.

Dem EUKLIDischen Raum kann eine **Orientierung** zugeordnet werden, die sich auf die Reihenfolge der Basisvektoren einer konkret verwendeten Basis im Translationsraum  $\mathbf{V}^3$  bezieht. Die Standardbasis wird gewöhnlich in der (geordneten) Folge  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  der Basisvektoren als **positiv orientiert** angesehen. Man bezeichnet bei dieser Festlegung das zugeordnete kartesische Koordinatensystem ebenfalls als positiv orientiert bzw. als **Rechtssystem**. Eine andere Basis  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  mit  $\mathbf{g}_i = g_i^j \mathbf{e}_j$  oder auch eine beliebige geordnete Folge dreier linear unabhängiger Vektoren  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  heißt dann positiv (bzw. negativ) orientiert, wenn

$$\det(\mathbf{A}_0) > 0 \quad (\text{bzw.} \quad \det(\mathbf{A}_0) < 0) \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_0 = (g_i^j)_{i,j=1}^3.$$

Die Transformation einer Basis  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  in eine andere Basis  $\{\bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2, \bar{\mathbf{g}}_3\}$  gemäß  $\bar{\mathbf{g}}_i = a_i^j \mathbf{g}_j$  heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend) wenn

$$\det(\mathbf{A}) > 0 \quad (\text{bzw.} \quad \det(\mathbf{A}) < 0) \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_0 = (a_i^j)_{i,j=1}^3.$$

Anschaulich kann ein positiv orientiertes Basissystem  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  über die Rechte-Hand-Regel interpretiert werden: Weist  $\mathbf{g}_1$  in Richtung des Daumens und  $\mathbf{g}_2$  in Richtung des Zeigefingers der rechten Hand, so muss  $\mathbf{g}_3$  die Richtung des aus dem Handteller nach oben zeigenden Mittelfingers haben.

Da bei Vertauschung zweier Zeilen (oder Spalten) sich das Vorzeichen einer Determinante ändert, kehrt sich die Orientierung der Folge  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  um, wenn man zwei dieser Vektoren vertauscht.

Man sagt auch, dass die Vektoren  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  ein **Rechtssystem** bilden, wenn diese in der angegebenen Reihenfolge positiv orientiert sind. Von einem **Linkssystem** spricht man, wenn die Folge der Vektoren ein negativ orientiertes System bilden.

Eine Teilmenge  $\mathbb{R}_0 \subset \mathbb{R}^3$ , deren Translationsraum  $\mathbf{V}_0$  ein Unterraum von  $\mathbf{V}^3$  ist, bildet zusammen mit dem in  $\mathbf{V}^3$  definierten inneren Produkt  $(\cdot, \cdot)$  selbst einen EUKLIDischen Raum. Die ebene Punktmenge

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, 0) \equiv (x_1, x_2)\}$$

mit dem Translationsraum

$$\mathbf{V}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}^3 \mid \mathbf{v} = (v^1, v^2, 0)^T \equiv (v^1, v^2)^T\}$$

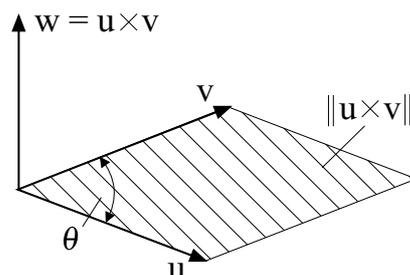
legen den zweidimensionalen EUKLIDischen Raum  $\mathbb{R}^2$  fest, auf den zur Darstellung "ebener" geometrischer Zusammenhänge zurückgegriffen wird. Alle im  $\mathbb{R}^3$  eingeführten Begriffe und daraus abgeleiteten Folgerungen sind im übertragenen Sinne auch für den  $\mathbb{R}^2$  gültig. Dazu ist im Zusammenhang mit Vektoren lediglich die dritte Koordinate zu streichen.

## V. Vektorprodukt und Spatprodukt

Die arithmetische und metrische Struktur des  $\mathbb{R}^3$  (und nur des  $\mathbb{R}^3$ ) wird mit der Einführung des Vektorproduktes und Spatproduktes zusätzlich bereichert.

Das **Vektorprodukt** (oder auch **Kreuzprodukt** genannt)  $\times$  ist eine Abbildung  $\mathbf{V}^3 \times \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3$ , die jedem geordneten Vektorpaar  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  einen Vektor  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  zuordnet, der folgende Bedingungen erfüllt:

- Sind  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  linear abhängig, d.h. existiert ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$  oder sind  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  bzw.  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , so ist  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
- Sind  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  linear unabhängig, so ist
  - $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin(\theta) \quad (\theta = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$
  - $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  ist orthogonal zu  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$ :  $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0, (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$
  - Die Vektoren  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.



Mit diesen Bedingungen ist das Vektorprodukt  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  eindeutig bestimmt. Daraus ergeben sich unmittelbar einige Folgerungen:

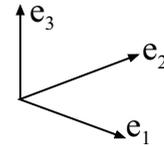
$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) && (\text{Antisymmetrie}) \\ (\alpha \mathbf{u}) \times \mathbf{v} &= \mathbf{u} \times (\alpha \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) && (\text{Homogenität}) \\ (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v} &= \mathbf{u}_1 \times \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \times \mathbf{v} && (\text{Linearität}) \end{aligned}$$

Sind die Vektoren  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i$  und  $\mathbf{v} = v^j \mathbf{g}_j$  in der Basis  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  dargestellt, so ist mit diesen Folgerungen das Vektorprodukt  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  berechenbar:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u^i \mathbf{g}_i) \times (v^j \mathbf{g}_j) = u^i v^j (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) \\ &= (u^1 v^2 - u^2 v^1) (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) + (u^1 v^3 - u^3 v^1) (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_3) + (u^2 v^3 - u^3 v^2) (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3). \end{aligned}$$

Es sind also nur die 3 Vektorprodukte der Basisvektoren noch zu bestimmen. Die Produkte der Vektoren der Standardbasis ergeben sich sofort über die Rechte-Hand-Regel:

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$$



Sind  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j$  in der Standardbasis gegeben, so erhält man folglich für deren Vektorprodukt

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u^2 v^3 - u^3 v^2) \mathbf{e}_1 + (u^3 v^1 - u^1 v^3) \mathbf{e}_2 + (u^1 v^2 - u^2 v^1) \mathbf{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 v^3 - u^3 v^2 \\ u^3 v^1 - u^1 v^3 \\ u^1 v^2 - u^2 v^1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Die in der Formel enthaltene Determinante entwickelt man nach der ersten Zeile und fasst die 3 entstehenden Adjunkten zu dem Vektor  $\mathbf{w}$  zusammen, der nun auch in der Standardbasis dargestellt ist.

Eigenschaften des Vektorproduktes ( $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{V}^3$  beliebig):

**GRASSMANN - Identität:**

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (2.1)$$

Als Merkhilfe kann man sich den Spruch "abc = bac minus cab" einprägen.

**LAGRANGEsche Identität:**

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) (\mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{d}) (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

**JACOBI-Identität:**

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Das **Spatprodukt** (auch gemischtes Produkt genannt)  $[\cdot, \cdot, \cdot]$  ist eine Abbildung  $\mathbf{V}^3 \times (\mathbf{V}^3 \times \mathbf{V}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ , die einem geordneten Tupel von Vektoren  $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$  eine reelle Zahl zuweist, die durch

$$[\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] \equiv (\mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

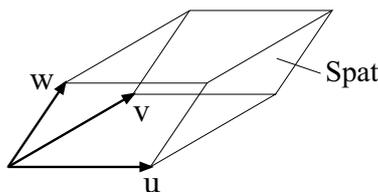
definiert ist. Mit den Darstellungen  $\mathbf{w} = w^k \mathbf{e}_k$ ,  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j$  ist

$$[\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = \det(\{\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}) = \begin{vmatrix} w^1 & w^2 & w^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}.$$

Damit folgt sofort

$$[\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] \begin{cases} > 0, & \text{wenn } \{\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\} \text{ ein Rechtssystem} \\ = 0, & \text{wenn } \{\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\} \text{ linear abhängig} \\ < 0, & \text{wenn } \{\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\} \text{ ein Linkssystem} \end{cases}.$$

Der Betrag des Spatproduktes  $|[\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]|$  ist gleich dem Inhalt des Spates, der von den Vektoren  $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$  aufgespannt wird.



Bei zyklischer Vertauschung der Reihenfolge der Vektoren  $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$  ändert sich nicht der Wert des Spatproduktes. Das Spatprodukt wechselt jedoch sein Vorzeichen bei Vertauschung zweier Vektoren.

$$[\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}] = -[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}].$$

Nützlich ist auch die Identität ( $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{V}^3$ )

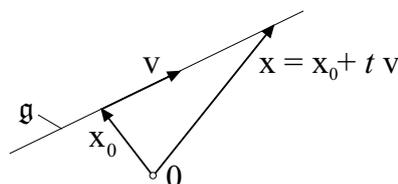
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] \mathbf{b} - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] \mathbf{a}. \quad (2.4)$$

## VI. Geraden und Ebenen

Geraden und Ebenen sind die einfachsten der geometrischen Objekte, um die es in dieser Schrift geht. Beide lassen sich in bequemer Weise durch die Architektur des EUKLIDischen Raumes beschreiben.

Eine **Gerade**  $g$  ist als Menge von Vektoren in der Form

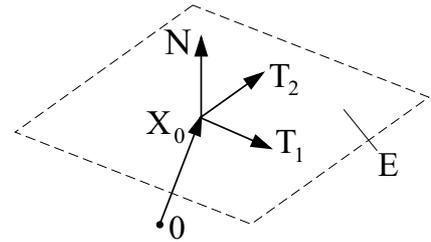
$$g = \{ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \in \mathbf{V}^3 \mid t \in \mathbb{R} \}$$



darstellbar, wobei  $\mathbf{x}_0$  der vom Ursprung  $\mathbf{0}$  ausgehende **Stützvektor** und  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  der **Richtungsvektor** der Geraden sind. Eine Gerade ist folglich ein um den Ortsvektor  $\mathbf{x}_0$  verschobener, vom Richtungsvektor  $\mathbf{v}$  aufgespannter eindimensionaler Unterraum  $\{t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbf{V}^3$ . Der normierte Richtungsvektor  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$  heißt auch Tangentenvektor der Geraden. Die  $\mathfrak{g}$  bildenden Vektoren  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$  sind Ortsvektoren und können mit den entsprechenden Punkten  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  identifiziert werden. In diesem Sinne bildet  $\mathfrak{g}$  eine eindimensionale Mannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ .

Eine **Ebene** ist als Menge von Vektoren in der Form

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + u\mathbf{T}_1 + v\mathbf{T}_2 \in \mathbf{V}^3 \mid u, v \in \mathbb{R}\}$$



darstellbar, wobei  $\mathbf{X}_0$  der vom Ursprung  $\mathbf{0}$  ausgehende Stützvektor und  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$  zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene sind. Eine Ebene ist folglich eine um den Ortsvektor  $\mathbf{X}_0$  verschobener, von den Vektoren  $\mathbf{T}_1$  und  $\mathbf{T}_2$  aufgespannter zweidimensionaler Unterraum  $\{u\mathbf{T}_1 + v\mathbf{T}_2 \mid u, v \in \mathbb{R}\} \subset \mathbf{V}^3$ . Indem die Ortsvektoren  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + u\mathbf{T}_1 + v\mathbf{T}_2$  mit den entsprechenden Punkten  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$  identifiziert werden, kann eine Ebene auch als zweidimensionale Mannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  interpretiert werden.

Das normierte Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren  $\mathbf{T}_1$  und  $\mathbf{T}_2$  liefert den **Normalenvektor**

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2}{\|\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2\|}$$

zur Ebene  $\mathbf{E}$ . In der Reihenfolge  $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}\}$  bilden diese Vektoren ein Rechtssystem. Der Normalenvektor  $\mathbf{N}$  ist zu allen Vektoren  $\mathbf{X} - \mathbf{X}_0$ , die in der Ebene  $\mathbf{E}$  liegen, orthogonal. Folglich kann eine Ebene bei gegebenem Normalenvektor  $\mathbf{N}$  und Stützvektor  $\mathbf{X}_0$  durch die sogenannte Normalgleichung der Ebene

$$(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0, \mathbf{N}) = 0$$

definiert werden. Der Vektor  $\mathbf{X} - \mathbf{X}_0$  liegt in dem von  $\mathbf{T}_1$  und  $\mathbf{T}_2$  aufgespannten Unterraum von  $\mathbf{V}^3$ , demzufolge sind die Vektoren  $\mathbf{X} - \mathbf{X}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$  linear abhängig und ihr Spatprodukt verschwindet:

$$[\mathbf{X} - \mathbf{X}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2] = 0.$$

Dies ist die dritte Form, in der eine Ebene darstellbar ist.

Fassen wir diese drei Darstellungsmöglichkeiten für eine Ebene nochmals zusammen:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + u\mathbf{T}_1 + v\mathbf{T}_2 \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

$$(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0, \mathbf{N}) = 0 \tag{2.5}$$

$$[\mathbf{X} - \mathbf{X}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2] = 0.$$

Erwähnt sei noch die Beschreibung einer Geraden als Schnittmenge zweier nicht paralleler Ebenen  $\mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{E}_2$ . Die Vektoren  $\mathbf{x}$  dieser Schnittgeraden bilden die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{X}_{01}, \mathbf{N}_1) &= 0 \\ (\mathbf{x} - \mathbf{X}_{02}, \mathbf{N}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (\mathbf{N}_1 \text{ und } \mathbf{N}_2 \text{ linear unabhängig}).$$

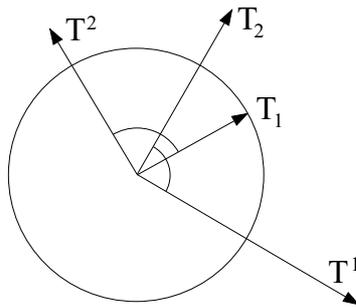
Dabei bezeichnen  $\mathbf{X}_{0i}$  den Stützvektor und  $\mathbf{N}_i$  den Normalenvektor der Ebene  $\mathbf{E}_i$  ( $i = 1, 2$ ).

## 2.2. Reziproke Basen

Darstellungen von Vektoren und die Durchführung von Vektoroperationen sind in einer orthonormalen Basis des zugrunde liegenden Vektorraumes besonders einfach. Steht eine solche Basis nicht zur Verfügung, so kommt man mit der Einführung einer zweiten zur gegebenen Basis reziproken Basis zu ähnlich einfachen Beziehungen. Eine derartige Situation tritt in den Tangentialräumen  $\mathbf{T}_\mathbf{X}$  auf, die jedem Punkt  $\mathbf{X}$  einer Fläche im Raum zugeordnet werden können. Nur in diesem Zusammenhang werden wir dieser Problematik begegnen, weshalb im Folgenden reziproke Basen mit Bezug auf (zweidimensionale) Vektorräume  $\mathbf{T}_\mathbf{X}$  eingeführt werden, die Unterräume von  $\mathbf{V}^3$  sind.

Jeder Basis  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$  des Vektorraumes  $\mathbf{T}_\mathbf{X}$  kann eine **reziproke Basis**  $\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2$ , deren Vektoren stets mit oben stehenden Indizes versehen sind, zur Seite gestellt werden. Diese reziproke Basis ist eindeutig durch die Bedingungen (siehe Abb. 2.7)

$$(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}_1) = (\mathbf{T}^2, \mathbf{T}_2) = 1 \quad \text{und} \quad (\mathbf{T}^2, \mathbf{T}_1) = (\mathbf{T}^1, \mathbf{T}_2) = 0 \quad (2.6)$$



festgelegt. Setzt man diese Vektoren als Linearkombinationen der Basis  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$  gemäß

$$\mathbf{T}^i = G^{i1}\mathbf{T}_1 + G^{i2}\mathbf{T}_2 = G^{ik}\mathbf{T}_k \quad (2.7)$$

an, so sind die Koeffizienten aus den Bedingungen (2.6) berechenbar. Es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{T}^1, \mathbf{T}_1) & (\mathbf{T}^1, \mathbf{T}_2) \\ (\mathbf{T}^2, \mathbf{T}_1) & (\mathbf{T}^2, \mathbf{T}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{11} & G^{12} \\ G^{21} & G^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1) & (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) \\ (\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1) & (\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} G^{11} & G^{12} \\ G^{21} & G^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1) & (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) \\ (\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1) & (\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2) \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{G}_\mathbf{X}^{-1}.$$

Die Matrix

$$\mathbf{G}_\mathbf{X} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1) & (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) \\ (\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1) & (\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2) \end{pmatrix}$$

und die zu dieser inverse Matrix  $\mathbf{G}_\mathbf{X}^{-1}$  sind symmetrisch und positiv definit (siehe auch Abschnitt 4.3). Mit

$$G_{ik}G^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

folgt sofort die Darstellung der Vektoren  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$  als Linearkombinationen der reziproken Basis:

$$\mathbf{T}_i = G_{i1}\mathbf{T}^1 + G_{i2}\mathbf{T}^2 = G_{ik}\mathbf{T}^k \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_\mathbf{X} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^1 \\ \mathbf{T}^2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Wegen  $\det(\mathbf{G}_\mathbf{X}^{-1}) = (\det(\mathbf{G}_\mathbf{X}))^{-1}$  sind beide Determinanten entweder gleichzeitig positiv oder negativ, folglich haben beide Basissysteme auch die gleiche Orientierung.

Ein Vektor  $\mathbf{U} \in \mathbf{T}_\mathbf{X}$  kann in beiden Basen wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= U^1\mathbf{T}_1 + U^2\mathbf{T}_2 = U^j\mathbf{T}_j = U^jG_{jk}\mathbf{T}^k = U_k\mathbf{T}^k \\ \mathbf{U} &= U_1\mathbf{T}^1 + U_2\mathbf{T}^2 = U_i\mathbf{T}^i = U_iG^{ik}\mathbf{T}_k = U^k\mathbf{T}_k. \end{aligned}$$

Ein Vergleich zwischen den Koordinaten  $U_k$  und  $U^k$  beider Darstellungen ergibt die Zusammenhänge

$$U^k = U_iG^{ik} \quad \text{und} \quad U_k = U^jG_{jk}. \quad (2.9)$$

Die Koordinaten eines Vektors können also bei Transformation zwischen den beiden Basissystemen über die Matrixkoeffizienten  $G_{ik}, G^{jk}$  ineinander überführt werden. Bei der Berechnung der Koordinaten  $U^k$  (bzw.  $U_k$ ) aus den Koordinaten  $U_i$  (bzw.  $U^j$ ) spricht man vom Heben (bzw. Senken) der Indizes.

Die Zweckmäßigkeit der Einführung einer reziproken Basis zur Basis  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$  wird bei der Berechnung des inneren Produktes von Vektoren deutlich. Sind  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  Vektoren aus  $\mathbf{T}_\mathbf{X}$  mit den Darstellungen

$$\mathbf{U} = U^i\mathbf{T}_i = U_j\mathbf{T}^j \quad \text{und} \quad \mathbf{V} = V^i\mathbf{T}_i = V_j\mathbf{T}^j,$$

so kann das innere Produkt  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  in den folgenden vier Formen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= U^iV^j(\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j) = U^iV^jG_{ij} \\ (\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= U_iV_j(\mathbf{T}^i, \mathbf{T}^j) = U_iV_jG^{ij} \\ (\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= U^iV_j(\mathbf{T}_i, \mathbf{T}^j) = U^iV_j\delta_i^j = U^iV_i \\ (\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= U_iV^j(\mathbf{T}^i, \mathbf{T}_j) = U_iV^j\delta_j^i = U_iV^i. \end{aligned}$$

Die Indizes von mehrfach indizierten Größen können ebenfalls mit den Koeffizienten  $G_{ik}, G^{jk}$  gehoben und gesenkt werden. Die folgenden Beispiele sollen die Vorgehensweise erläutern:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ik}\delta_j^k = A_{ik}G^{km}G_{mj} = A_i^mG_{mj} & \text{analog} & \quad A^{ij} = A_m^iG^{mj} \\ A^i_j &= A^i_k\delta_j^k = A^i_kG^{km}G_{mj} = A^{im}G_{mj} & \text{analog} & \quad A_i^j = A_{im}G^{mj} \\ B^k_{ijl} &= B^m_{ijl}\delta_m^k = B^m_{ijl}G_{mp}G^{pk} = B_{pijl}G^{pk}. \end{aligned}$$

Im Falle einer orthonormalen Basis ist  $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}^i$  ( $i = 1, 2$ ) und es muss nicht zwischen beiden Basen unterschieden werden.

**Bemerkung:** Bezogen auf Zusammenhänge in beliebigen Vektorräumen ist dieser Zugang über reziproke Basen im Allgemeinen nicht üblich. Eine mathematisch tiefergehende Arithmetik basiert auf der Konstruktion dualer Basissysteme im dualen Vektorraum, der jedem gegebenen Vektorraum zugeordnet ist. Dies führt letztlich zur Einführung kovarianter und kontravarianter Vektoren, deren Koordinaten formal untereinander genau so transformiert werden wie bei dem hier angegebenen Wechsel zwischen einer gegebenen Basis und ihrer reziproken Basis. Genaue Ausführungen findet man in der Literatur zur Tensoralgebra, z.B. in [Bett]. Der Zugang über reziproke Basen erfüllt aber voll und ganz den hier verfolgten Zweck.

### 2.3. Topologie EUKLIDischer Räume

Im weiteren Text wird häufig von Mengen über Punkten, Vektoren, Funktionen, Abbildungen, ... die Rede sein. Unter einer Mengen ist im Sinne von CANTOR eine Zusammenfassungen von vorher genau bestimmten mathematischen Objekten (Punkten, Vektoren, ...) zu einem Ganzen zu verstehen. Wenn diese Objekte, die gewöhnlich Elemente der Menge genannt werden, eine herausgehobene Gemeinsamkeit aufweisen bzw. in bestimmten Relationen zueinander stehen, so spricht man gelegentlich von einer Familie oder Klasse von Elementen. Häufig wird z.B. die Teilmenge der orthogonalen Matrizen in der Menge aller quadratischen Matrizen als Familie oder Klasse bezeichnet.

Geometrische Objekte in den EUKLIDischen Räumen  $\mathbb{R}^3$  und  $\mathbb{R}^2$ , insbesondere die hier im Mittelpunkt stehenden Kurven und Flächen, werden durch kontinuierliche Punktmengen beschrieben. Das Studium derartiger Punktmengen erfolgt auf der Grundlage einer in den EUKLIDischen Raum  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) eingeführten **Topologie**. Mit Bezug auf eine gegebene Menge  $\mathfrak{M}$  spricht man allgemein von einer Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $\mathfrak{M}$ , wenn eine Familie sogenannter offener Teilmengen aus  $\mathfrak{M}$  mit bestimmten Eigenschaften definiert ist. Eine derartige Topologie soll im Folgenden für EUKLIDische Räume  $\mathbb{R}^n$  entwickelt werden.

Unter einer **offenen  $\varepsilon$ -Kugel  $\mathbf{K}_\varepsilon^n(\mathbf{x}_0)$**  ( $\varepsilon > 0$ ) zum Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  versteht man die folgende Punktmenge des  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathbf{K}_\varepsilon^n(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}.$$

Im Falle  $n = 3$  sind dies gewöhnliche Kugeln und für  $n = 2$  Kreise, jeweils mit dem Radius  $\varepsilon$  und dem Mittelpunkt  $\mathbf{x}_0$ . In der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}^1$  sind  $\varepsilon$ -Kugeln die offenen Intervalle  $\mathbf{K}_\varepsilon^1(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}_0 - \varepsilon, \mathbf{x}_0 + \varepsilon)$ . Zu beachten ist, dass die Randpunkte  $\mathbf{x}$  mit  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon$  nicht zu diesen Kugeln gehören, was die Bezeichnung offene Kugeln rechtfertigt. Die Menge aller dieser offenen  $\varepsilon$ -Kugeln  $\mathbf{K}_\varepsilon^n(\mathbf{x}_0)$  ( $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  beliebig) wird **Basis der Standard-Topologie** des  $\mathbb{R}^n$  genannt. Eine Menge  $\mathfrak{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt

**offene Menge**, wenn diese als Vereinigung beliebig vieler oder als Durchschnitt endlich vieler offener  $\varepsilon$ -Kugeln darstellbar ist:

$$\mathfrak{G} = \bigcup_{\alpha \in I, \beta \in J} \mathbf{K}_{\varepsilon_{\alpha}}^n(\mathbf{x}_{0\beta}) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{G} = \bigcap_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, m} \mathbf{K}_{\varepsilon_i}^n(\mathbf{x}_{0j})$$

(  $I, J$  - beliebige Indexmengen ). Die Gesamtheit aller so definierten offenen Mengen  $\mathfrak{G}$  heißt **Standard-Topologie**  $\mathfrak{T}^n$  des  $\mathbb{R}^n$ . Insbesondere der  $\mathbb{R}^n$  selbst und die leere Menge  $\emptyset$  sind in diesem Sinne offene Mengen und damit Bestandteile dieser Topologie. Es ist auch sofort erkennbar, dass die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen wieder offene Mengen sind und damit zu  $\mathfrak{T}^n$  gehören. Offene Mengen beschreiben umgangssprachlich ausgedrückt Körper im  $\mathbb{R}^n$ , die keine Oberflächenpunkte (‘‘keine Haut’’) und damit keinen Rand besitzen. Ein offener Quader im  $\mathbb{R}^3$  (offenes Rechteck im  $\mathbb{R}^2$ ) ist z.B. durch

$$\left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i ; i = 1, \dots, n \right\} \quad n = 3 \quad (n = 2)$$

beschreibbar. Jede offene Menge  $\mathfrak{U}$ , die einen bestimmten Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  enthält, wird **Umgebung des Punktes  $\mathbf{x}$**  genannt.

Eine Menge  $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **abgeschlossen**, wenn die zugehörige komplementäre Menge  $\mathfrak{G} = \mathbb{R}^n - \mathfrak{B}$  eine offene Menge der Topologie  $\mathfrak{T}^n$  des  $\mathbb{R}^n$  ist. Alle abgeschlossenen Intervalle, Rechtecke oder Quader sind Beispiele für abgeschlossene Punktmengen der entsprechenden Räume  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ . Sind  $\mathfrak{B}_\alpha = \mathbb{R}^n - \mathfrak{G}_\alpha$  abgeschlossene Mengen mit den komplementären offenen Mengen  $\mathfrak{G}_\alpha$  ( $\alpha \in I$ ), so folgt über die MORGANschen Regeln der Mengenlehre

$$\bigcup_{\alpha \in I} \mathfrak{B}_\alpha = \mathbb{R}^n - \bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{G}_\alpha, \quad \bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{B}_\alpha = \mathbb{R}^n - \bigcup_{\alpha \in I} \mathfrak{G}_\alpha.$$

Daraus folgt, dass die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossene Mengen sind.

Nicht jede Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist als offene oder abgeschlossene Menge klassifizierbar. Halbseitig offene Intervalle sind z.B. im  $\mathbb{R}^1$  weder offen noch abgeschlossen. Zu einer beliebigen Teilmenge  $\mathfrak{P} \subseteq \mathbb{R}^n$  kann aber stets eine ‘‘maximale’’ offene und ‘‘minimale’’ abgeschlossene Menge angegeben werden, die auf folgenden Begriffen basieren:

**Inneres** von  $\mathfrak{P}$ :

$$\overset{\circ}{\mathfrak{P}} = \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{P} \mid \text{Es existiert ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } \mathbf{K}_\varepsilon^n(\mathbf{x}) \subset \mathfrak{P} \}$$

**Abgeschlossene Hülle** von  $\mathfrak{P}$ :

$$\overline{\mathfrak{P}} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{Für beliebiges } \varepsilon > 0 \text{ ist } \mathbf{K}_\varepsilon^n(\mathbf{x}) \cap \mathfrak{P} \neq \emptyset \}.$$

Offensichtlich ist  $\overset{\circ}{\mathfrak{P}} \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \overline{\mathfrak{P}}$  und insbesondere gilt für offene Mengen  $\mathfrak{G} = \overset{\circ}{\mathfrak{G}}$  und abgeschlossene Mengen  $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}$ . Das Innere  $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}$  von  $\mathfrak{P}$  ist stets eine offene Menge und

jede in  $\mathfrak{P}$  enthaltene offene Menge ist auch Teilmenge von  $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}$ . Die abgeschlossene Hülle  $\overline{\mathfrak{P}}$  von  $\mathfrak{P}$  ist stets eine abgeschlossene Menge und jede  $\mathfrak{P}$  enthaltende abgeschlossene Menge enthält  $\overline{\mathfrak{P}}$  als Teilmenge. Die mengentheoretische Differenz  $\partial\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{P}} - \overset{\circ}{\mathfrak{P}}$  bildet den **Rand** der Menge  $\mathfrak{P}$ .

Eine offene Menge  $\mathfrak{G} \in \mathfrak{T}^n$  heißt **zusammenhängend** (oder wegzusammenhängend), wenn zwei beliebige Punkte in  $\mathfrak{G}$  durch einen ganz in  $\mathfrak{G}$  verlaufenden Polygonzug verbunden werden können. Eine offene und zusammenhängende Menge des  $\mathbb{R}^n$  nennt man **Gebiet**.

Eine Menge  $\mathfrak{P} \subset \mathbb{R}^n$  heißt **beschränkt**, wenn ein  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  und eine reelle Zahl  $R$  ( $0 < R < \infty$ ) existieren, so dass  $\mathfrak{P}$  vollständig in der Kugel  $\mathbf{K}_R^n(\mathbf{x}_0)$  enthalten ist:  $\mathfrak{P} \subset \mathbf{K}_R^n(\mathbf{x}_0)$ . Eine abgeschlossene und beschränkte Menge des  $\mathbb{R}^n$  wird **kompakt** genannt. Ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$  und die Mengen

$$\left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \mid a_i \leq x_i \leq b_i ; -\infty < a_i, b_i < \infty \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

sind Beispiele für kompakte Mengen.

## 2.4. Abbildungen und Funktionen

Die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Topologie des  $\mathbb{R}^n$  bildet die Grundlage zur Entwicklung einer Analysis in EUKLIDischen Räumen. Einen zentralen Platz in dieser Analysis nehmen der Begriff des Grenzwertes einer Punktfolge und der darauf aufbauende Begriff der Stetigkeit von Abbildungen zwischen Mengen EUKLIDischer Räume ein.

Eine Folge von Punkten  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \dots$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt **konvergent** gegen einen Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ( $\mathbf{x}_m \rightarrow \mathbf{x}$  für  $m \rightarrow \infty$ ), wenn für jede Umgebung  $\mathfrak{U} \in \mathfrak{T}^n$  des Punktes  $\mathbf{x}$  ein  $m_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $m > m_0$  gilt:  $\mathbf{x}_m \in \mathfrak{U}$ . Der Punkt  $\mathbf{x}$  heißt dann **Grenzwert** (oder Häufungspunkt) der konvergenten Punktfolge  $\{\mathbf{x}_m\}$ . Existiert ein Grenzwert  $\mathbf{x}$  für  $\{\mathbf{x}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ , so ist dieser eindeutig bestimmt und man schreibt  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}$ .

Eine **Abbildung** der Menge  $\mathfrak{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  auf die Menge  $\mathfrak{N} \subseteq \mathbb{R}^m$  wird durch  $\mathbf{f} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  bezeichnet und man nennt  $\mathfrak{M}$  den Definitionsbereich und  $\mathfrak{N}$  den Wertebereich dieser Abbildung. Wird durch  $\mathbf{f}$  jedem Element aus  $\mathfrak{M}$  eindeutig ein Element aus  $\mathfrak{N}$  zugewiesen, so spricht man von einer **eindeutigen Abbildung** oder einer **Funktion**  $\mathbf{f} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  bzw.  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  mit  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$  und  $\mathbf{y} \in \mathfrak{N}$ .

Eine Abbildung  $\mathbf{f} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  ist **stetig** im Punkt  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ , wenn für jede (offene) Umgebung  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{N}$  des Punktes  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathfrak{N}$  eine den Punkt  $\mathbf{x}$  enthaltende (offene) Umgebung  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}$  existiert und  $\mathbf{f}(\mathfrak{U}) \subseteq \mathfrak{V}$  gilt. Die Abbildung  $\mathbf{f}$  wird auf  $\mathfrak{M}$  stetig genannt, wenn sie in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$  stetig ist.

Diese etwas abstrakte Definition wird durchsichtiger am Beispiel einer reellwertigen Funktion einer reellen Variablen  $f : I \rightarrow J$  ( $I, J \subset \mathbb{R}$ ). Man nennt  $y = f(x)$  stetig

im Punkt  $x_0 \in I$ , wenn für beliebiges  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  existiert und für alle  $y = f(x)$  mit

$$y \in J_0 = \{y \mid |y - f(x_0)| < \varepsilon\} \subset J \quad \text{gilt} \quad x \in I_0 = \{x \mid |x - x_0| < \delta\} \subset I.$$

Damit ist aber  $f(I_0) \subseteq J_0$  und  $I_0, J_0$  sind offene Umgebungen (Intervalle) aus der Topologie des  $\mathbb{R}^1$ .

Eine Abbildung  $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  heißt:

a) **Surjektiv**, wenn für jedes  $y \in \mathfrak{N}$  wenigstens ein  $x \in \mathfrak{M}$  mit  $f(x) = y$  existiert. Damit ist erlaubt, dass verschiedenen Urbildern  $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$  das gleiche Bildelement  $y = f(x_1) = f(x_2)$  zugeordnet wird.

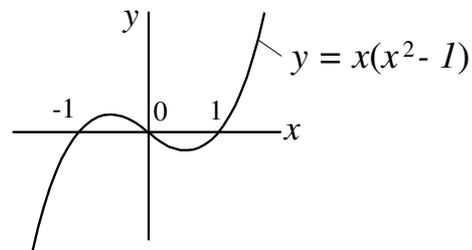
b) **Injektiv**, wenn für beliebige  $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$  mit  $f(x_1) = f(x_2)$  stets  $x_1 = x_2$  folgt. Dabei muss nicht für jedes  $y \in \mathfrak{N}$  ein  $x \in \mathfrak{M}$  mit  $y = f(x)$  existieren.

c) **Bijektiv**, wenn  $f$  surjektiv und injektiv ist. In diesem Fall spricht man auch von einer eindeutigen Abbildung (Funktion) von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{N}$ . Jedem  $x \in \mathfrak{M}$  wird genau ein  $y \in \mathfrak{N}$  zugeordnet und umgekehrt gehört zu jedem  $y \in \mathfrak{N}$  genau ein  $x = f^{-1}(y) \in \mathfrak{M}$ . Die Abbildung  $f^{-1} : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$  heißt inverse Abbildung (oder inverse Funktion) zu  $f$ .

**Beispiele:**

a)  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gemäß  $x \in \mathbb{R} \rightarrow y = f(x) = x(x^2 - 1) \in \mathbb{R}$

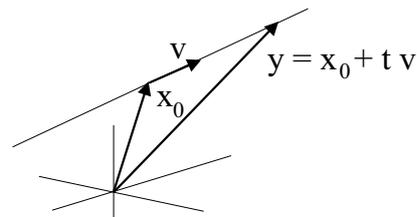
Die Abbildung  $f$  ist surjektiv, denn für beliebiges  $y \in \mathbb{R}$  existiert wenigstens ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = y$ .



b)  $\mathfrak{M} = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{N} = \mathbb{V}^3$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^3$  gemäß  $t \in \mathbb{R} \rightarrow y = f(t) = x_0 + tv \in \mathbb{V}^3$

( $x_0, v \in \mathbb{V}^3$  fest gewählt)

Die Abbildung  $f$  ist injektiv, denn für beliebige  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  mit  $f(t_1) = f(t_2)$  folgt unmittelbar  $t_1 = t_2$



c)  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathbb{V}^3$  und  $f : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  gemäß  $x \in \mathbb{V}^3 \rightarrow y = Ax \in \mathbb{V}^3$  mit der  $3 \times 3$ -Matrix  $A$ , wobei  $\det(A) \neq 0$ . Wegen  $\det(A) \neq 0$  ist  $A$  regulär und es

existiert die inverse Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$ . Folglich sind  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$  für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}^3$  eindeutig bestimmt und damit  $\mathbf{f}$  eine bijektive Abbildung.

Eine Abbildung  $\mathbf{f} : \mathfrak{M} \subset \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , die jedem Vektor aus  $\mathfrak{M}$  eine reelle Zahl zuweist, heißt skalare Funktion oder **Funktional**. Ist dieser funktionelle Zusammenhang linear, d.h., gilt

$$\mathbf{f}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{f}(\mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{M} \text{ und } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

so heißt  $\mathbf{f}$  **lineares Funktional** auf  $\mathfrak{M}$ .

Das innere Produkt  $(\cdot, \mathbf{v}_0)$  mit festgehaltenem  $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}^3$  ist ein auf  $\mathfrak{M} = \mathbf{V}^3$  definiertes lineares Funktional  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$ . Es kann gezeigt werden, dass jedes lineare Funktional im  $\mathbf{V}^3$  in dieser Form als inneres Produkt darstellbar ist (Satz von RIESZ).

Ist der Wertebereich  $\mathfrak{N}$  einer Abbildung  $\mathbf{f} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  eine Teilmenge des Vektorraumes  $\mathbf{V}^n$  mit  $\dim(\mathbf{V}^n) = n > 1$ , so spricht man von einer **vektorwertigen Abbildung**. Der Definitionsbereich  $\mathfrak{M}$  sei im Folgenden eine offene Teilmenge von  $\mathbf{V}^m$  mit  $\dim(\mathbf{V}^m) = m \geq 1$ . In  $\mathbf{V}^m$  und  $\mathbf{V}^n$  seien die Vektoren jeweils in der Standardbasis  $\{\mathbf{e}_i\}$  dargestellt und deshalb durch geordnete Tupel ihrer Koordinaten  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$  bzw.  $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$  eindeutig beschreibbar.

Eine surjektive Abbildung  $\mathbf{f} : \mathfrak{M} \subset \mathbf{V}^m \rightarrow \mathfrak{N} \subset \mathbf{V}^n$  ( $1 \leq m, n \leq 3$ ) gemäß

$$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \dots, f^n(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{y}(\mathbf{x}) = (y^1, \dots, y^n)$$

heißt differenzierbar auf  $\mathfrak{M}$ , wenn die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f^i(\mathbf{x})}{\partial x^j} = \frac{\partial y^i(\mathbf{x})}{\partial x^j} \equiv y_{,j}^i(\mathbf{x}) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \text{ und } 1 \leq j \leq m$$

und jedes  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$  existieren. Diese Ableitungen fasst man in der **JACOBI-Matrix** zusammen:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1(\mathbf{x})}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1(\mathbf{x})}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y^n(\mathbf{x})}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n(\mathbf{x})}{\partial x^m} \end{pmatrix} = (y_{,j}^i(\mathbf{x}))_{i=1}^n{}_{j=1}^m. \quad (2.10)$$

Eine **skalare Funktion**  $\mathbf{f} : \mathfrak{M} \rightarrow I \subset \mathbb{R}$  hat die JACOBI-Matrix

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^m} \right),$$

deren Koeffizienten die Koordinaten des **Gradienten** von  $\mathbf{f}$  sind:

$$\text{grad}(\mathbf{f}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^1} \mathbf{e}_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^m} \mathbf{e}_m.$$

Eine **Vektorfunktion**  $\mathbf{y} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{N} \subset \mathbf{V}^n$  gemäß

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{y}(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t))$$

besitzt die JACOBI-Matrix

$$\mathbf{J}_y(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1(t)}{\partial t} \\ \dots \\ \frac{\partial y^n(t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{y}}(t).$$

Sind  $\mathbf{y}_1 : I \rightarrow \mathfrak{N}$  und  $\mathbf{y}_2 : I \rightarrow \mathfrak{N}$  Vektorfunktionen, so erhält man mit der Produktregel der Differenziation sofort folgende Formeln für die Ableitungen des inneren Produktes und des Vektorproduktes dieser Funktionen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t)) &= (\dot{\mathbf{y}}_1(t), \mathbf{y}_2(t)) + (\mathbf{y}_1(t), \dot{\mathbf{y}}_2(t)) \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{y}_1(t) \times \mathbf{y}_2(t)) &= \dot{\mathbf{y}}_1(t) \times \mathbf{y}_2(t) + \mathbf{y}_1(t) \times \dot{\mathbf{y}}_2(t). \end{aligned}$$

Ist  $\|\mathbf{y}(t)\| = \sqrt{(y^1(t))^2 + \dots + (y^n(t))^2} = c = \text{const.}$  für alle  $t \in I$ , so sind die Vektoren  $\mathbf{y}(t)$  und  $\dot{\mathbf{y}}(t)$  für alle  $t \in I$  orthogonal zueinander ( $\mathbf{y}(t) \perp \dot{\mathbf{y}}(t)$ ), d.h.

$$(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Denn, durch Ableitung des inneren Produktes  $c^2 = \|\mathbf{y}(t)\|^2 = (\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t))$  folgt:

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t)) = 2(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) \quad \text{und damit } (\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) = 0.$$

Eine stetige bijektive Abbildung  $\mathbf{f} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  ( $n = m$ ), deren inverse Abbildung  $\mathbf{f}^{-1} : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$  ebenfalls stetig ist, wird **Homöomorphismus** von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{N}$  genannt. Sind außerdem  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{f}^{-1}$   $k$ -mal stetig differenzierbar, d.h., existieren für alle  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathfrak{M}$  und  $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n) \in \mathfrak{N}$  die stetigen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $k \geq 1$  und ist  $\text{rang}(\mathbf{J}_f(\mathbf{x})) = n$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ , so bezeichnet man  $\mathbf{f}$  als einen  $C^k$ -**Diffeomorphismus** von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{N}$ . Ohne Bezug zu einem konkreten  $k \geq 1$  spricht man auch einfach von einem Diffeomorphismus  $\mathbf{f} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ .

Ist  $\mathfrak{M} \subset \mathbf{V}^m$  eine offene Menge und  $\mathbf{f} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbf{V}^n$  ( $m \leq n$ ) eine differenzierbare Abbildung mit  $\text{rang}(\mathbf{J}_f(\mathbf{x})) = m$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ , so nennt man  $\mathbf{f}$  eine **Immersion**. Zu beachten ist, dass eine Immersion nicht notwendig injektiv sein muss. Das folgende Beispiel belegt dies:

**Beispiel:**

Es sei  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{V}^2$  gemäß  $t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{f}(t) = (\cos(t), \sin(t))^T \in \mathbf{V}^2$ , dann ist  $\mathbf{J}_f(t) = (-\sin(t), \cos(t))^T \neq \mathbf{0}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und folglich  $\mathbf{f}$  eine Immersion. Wegen  $\mathbf{f}(t_1) = \mathbf{f}(t_2)$  für  $t_1 \neq t_2$  mit  $t_2 = t_1 + 2\pi$  ist  $\mathbf{f}$  aber nicht injektiv.

Häufig Verwendung findet die etwas ungenaue Ausdrucksform "hinreichend glatte Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ". Damit will man sich nicht auf eine konkrete Differenziationsordnung von  $\mathbf{f}$  festlegen, sondern verlangt, dass die angesprochene Funktion wenigstens so oft stetig differenzierbar ist, wie es die weitere Verwendung erfordert.

Eine Abbildung  $A : \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3$  heißt lineare Abbildung oder **lineare Transformation**, wenn für alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}^3$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:

$$A(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha A(\mathbf{u}) + \beta A(\mathbf{v}).$$

Ist im  $\mathbf{V}^3$  eine Basis ausgewiesen, so kann  $A$  in dieser Basis durch eine Matrix dargestellt werden. In der Standardbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  ist der Zusammenhang  $\mathbf{w} = A(\mathbf{u})$  mit  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{w} = w^j \mathbf{e}_j$  durch

$$w^j = A_i^j u^i \quad (j = 1, 2, 3) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \{A_i^j\}_{i,j=1}^3$$

beschreibbar. Die Abbildung  $A$  ist genau dann bijektiv, wenn  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . In diesem Fall bildet  $A$  einen **Isomorphismus** von  $\mathbf{V}^3$  auf  $\mathbf{V}^3$ .

Die lineare Abbildung  $Q : \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3$  heißt orthogonal, wenn das innere Produkt  $(\cdot, \cdot)$  in  $\mathbf{V}^3$  invariant bezüglich  $Q$  ist, d.h. wenn gilt

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (Q(\mathbf{u}), Q(\mathbf{v})) \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}^3.$$

Unter einer **orthogonalen Abbildung** bleiben die Längen von Vektoren und die zwischen ihnen bestehenden Winkel unverändert. Die einer orthogonalen Abbildung in der Standardbasis zugeordnete Matrix  $\mathbf{Q}$  ist orthogonal und  $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$ . Orthogonale Abbildungen sind demzufolge bijektiv und es existiert die inverse orthogonale Abbildung  $Q^{-1}$ , deren zugeordnete Matrix  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$  ist. Aus Sicht der Geometrie beschreibt eine orthogonale Abbildung eine Drehung des Raumes um eine feststehende Achse durch den Ursprung ( im Falle  $\det(\mathbf{Q}) = 1$  ) oder eine Spiegelung an einer Ebene ( im Falle  $\det(\mathbf{Q}) = -1$  ).

Abbildungen der Form  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{w} = A(\mathbf{u}) + \mathbf{b} \in \mathbf{V}^3$  mit der linearen Abbildung  $A$  und einem festen Vektor  $\mathbf{b} \in \mathbf{V}^3$  heißen **affine Abbildungen**. Durch affine Abbildungen werden Geraden in Geraden und Ebenen in Ebenen abgebildet. Ist  $\mathbf{w} = Q(\mathbf{u}) + \mathbf{b}$  mit der orthogonalen Abbildung  $Q$  und  $\det(\mathbf{Q}) = 1$ , so spricht man von **EUKLIDISCHEN BEWEGUNGEN**. EUKLIDische Bewegungen realisieren eine Überlagerung von Drehung und Translation des Raumes. Der Vektor  $\mathbf{u}$  wird zunächst in den Vektor  $Q(\mathbf{u})$  gedreht und dieser anschließend um den Vektor  $\mathbf{b}$  verschoben.

Direkt aus den Bedingungen zur Bildung des Vektorproduktes  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  der Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  folgt, dass sich unter einer EUKLIDischen Bewegung der Form  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}(\mathbf{u})$  mit  $\det(\mathbf{Q}) = 1$  für die gedrehten Vektoren  $\mathbf{Q}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{Q}(\mathbf{v})$  das Vektorprodukt  $\mathbf{Q}(\mathbf{w}) = \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \times \mathbf{Q}(\mathbf{v})$  ergibt. Mit

$$\begin{aligned} [\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] &= (\mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{Q}(\mathbf{w}), \mathbf{Q}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})) = (\mathbf{Q}(\mathbf{w}), \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \times \mathbf{Q}(\mathbf{v})) \\ &= [\mathbf{Q}(\mathbf{w}), \mathbf{Q}(\mathbf{u}), \mathbf{Q}(\mathbf{v})] \end{aligned}$$

leitet man damit die Invarianz des Spatproduktes unter EUKLIDischen Bewegungen der angegebenen Form ab.

# 3. Kurven

Unter einer Kurve im EUKLIDischen Raum  $\mathbb{R}^3$  stellt man sich eine aus Punkten stetig zusammengesetzte linienförmige Struktur vor und stuft sie demzufolge als eindimensionales geometrisches Objekt ein, das nur in einer Richtung bzw. in der dazu entgegengesetzten Richtung zu durchlaufen ist. Eine Kurve besitzt einen Anfangs- und Endpunkt, womit eine Orientierung verbunden ist. Fallen beide Punkte zusammen, so spricht man von einer **periodischen** oder **geschlossenen Kurve**. Endet eine Kurve nicht im gleichen Punkt, in dem sie beginnt, so handelt es sich um eine **offene Kurve**.

Eine offene Kurve oder ein offenes Kurvenstück kann anschaulich als dünner Draht im Raum gedeutet werden. Ein derartiger Draht ist stets zu einem Geradenstück verbiegsbar, welches auf einem Intervall der reellen Zahlengeraden platziert werden kann. Auf diese Weise entsteht eine Abbildung, die jeder reellen Zahl einen Kurvenpunkt zuordnet und von der wir fordern, dass sie hinreichend glatt ist. Zumindest soll in jedem Punkt der Kurve in eindeutiger Weise eine Tangente angelegt werden können. Damit sind Kurven ausgeschlossen, die einen Knick besitzen oder Punkte enthalten in denen der Tangentenvektor verschwindet. Diese Überlegungen bilden den Ausgangspunkt zur Parameterdarstellung einer Kurve, womit wir unseren Exkurs durch die Kurventheorie beginnen.

## 3.1. Definitionen und Parameterdarstellung

**Definition 3.1** *Eine **regulär parametrisierbare Kurve** ist eine auf dem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  definierte Immersion*

$$\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{gemäß} \quad t \in I \rightarrow \mathbf{x}(t) = x_1(t) \mathbf{e}_1 + x_2(t) \mathbf{e}_2 + x_3(t) \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Wenn  $t$  das Intervall  $I$  durchläuft, besteht der Wertebereich dieser Abbildung aus allen Ortsvektoren  $\mathbf{x}(t)$ . Die Menge aller dieser Ortsvektoren ist

$$\mathbf{c} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}(t); t \in I \}$$

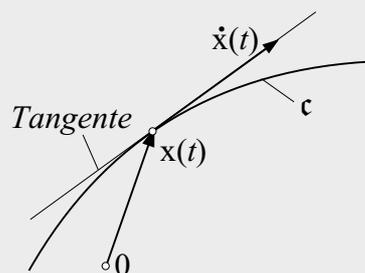
und heißt **Spur der Kurve**.

Die Kurvenkoordinaten  $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind stetig differenzierbare Funktionen und für jedes  $t \in I$  existiert im Punkt  $\mathbf{x}(t)$  der **Tangentenvektor**

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0}.$$

Ist  $\mathbf{x}(t)$   $r$ -mal stetig differenzierbar (in der Regel ist  $r = 1, 2$  oder  $3$ ), so spricht man von einer **regulär parametrisierten  $C^r$ -Kurve**. Die Menge

$$\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\mathbf{c}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{y} = \mathbf{y}(\tau) = \tau \dot{\mathbf{x}}(t) ; \tau \in \mathbb{R}\}$$



heißt **Tangententialraum** der Kurve im Punkt  $\mathbf{x}(t)$  und die Gesamtheit aller Vektoren  $\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\mathbf{c})$  wird als **Tangente** an die Spur  $\mathbf{c}$  der Kurve im Punkt  $\mathbf{x}(t)$  bezeichnet.

Der Tangentialraum in jedem Kurvenpunkt bildet einen eindimensionalen Unterraum im  $\mathbb{R}^3$ . Die Tangente an  $\mathbf{c}$  im Punkt  $\mathbf{x}(t)$  ist die Gerade, die durch Verschiebung des Tangentialraumes um den Stützvektor  $\mathbf{x}(t)$  entsteht.

Für eine bestimmte Kurve gibt es nicht nur eine Parametrisierung. Man hat es vielmehr mit einer Klasse von regulären Parametrisierungen zu tun und sieht eine **reguläre Kurve** als Klasse ( $\mathbf{c}$ ) aller ihrer regulären Parametrisierungen an. Zwischen den Klassen ( $\mathbf{c}$ ) und den Spuren  $\mathbf{c}$  von Kurven besteht jedoch im Allgemeinen keine injektive, sondern nur eine surjektive Beziehung, so dass ( $\mathbf{c}$ ) und  $\mathbf{c}$  nicht miteinander identifiziert werden können. D.h. Kurven, die verschiedene Klassen definieren, können trotzdem die gleiche Spur besitzen. Folglich muss stets zwischen Klasse ( $\mathbf{c}$ ) und Spur  $\mathbf{c}$  einer Kurve unterschieden werden (siehe dazu Beispiel 3.3). Die Transformation zu einer anderen Parametrisierung muss bestimmte Bedingungen erfüllen.

**Definition 3.2** Sind  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  Parametrisierungen einer  $C^r$ -Kurve mit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  und  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\tau)$ , so spricht man von einer **verträglichen Parametertransformation**  $\varphi$ , wenn

$$\varphi : \bar{I} \rightarrow I \quad \text{gemäß} \quad \tau \in \bar{I} \rightarrow t = \varphi(\tau) = \mathbf{x}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}(\tau)) \in I$$

ein  $C^r$ -Diffeomorphismus von  $\bar{I}$  auf  $I$  ist. In diesem Falle gilt:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \dot{\varphi}(\tau) \neq 0 \quad \text{für alle } \tau \in \bar{I}.$$

Die Parametertransformation  $\varphi$  heißt **orientierungserhaltend (orientierungsumkehrend)**, wenn  $\dot{\varphi}(\tau) > 0$  ( $\dot{\varphi}(\tau) < 0$ ) für alle  $\tau \in \bar{I}$  ist.

Für die Tangentenvektoren  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  und  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)$  an eine Kurve im Punkt  $\bar{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{x}(\varphi(\tau))$  leitet man über die Kettenregel der Differenziation den Zusammenhang

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(\tau) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \dot{\mathbf{x}}(t) \dot{\varphi}(\tau) \quad \text{mit } t = \varphi(\tau)$$

her. Wie zu erwarten war, ändert sich bei einer verträglichen orientierungserhaltenden Parametertransformation lediglich die Länge des Tangentenvektors um den Faktor  $\dot{\varphi}(\tau)$ , nicht jedoch seine Richtung.

In der Klasse (c) aller verträglichen Parametrisierungen einer Kurve kann eine Relation  $\sim$  wie folgt eingeführt werden:

Die Parametrisierungen  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  stehen genau dann in Relation ( $\mathbf{x} \sim \bar{\mathbf{x}}$ ) zueinander, wenn  $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$  ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ist, d.h. wenn  $\dot{\varphi} > 0$ . Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, die eine Aufteilung aller regulären Parametrisierungen in zwei Teilklassen bewirkt. Alle Parametrisierungen einer Teilklasse sind untereinander orientierungserhaltend. Demgegenüber sind Transformationen zwischen Parametrisierungen verschiedener Teilklassen orientierungsumkehrend.

Die Relation  $\sim$  ist durch folgende Eigenschaften geprägt:

- $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$ , d.h. jede Parametrisierung ist zu sich selbst in Relation.
- Aus  $\mathbf{x}(t) \sim \bar{\mathbf{x}}(\tau)$  mit  $t = \varphi(\tau)$  folgt  $\bar{\mathbf{x}}(\tau) \sim \mathbf{x}(t)$  mit  $\tau = \varphi^{-1}(t)$ , denn mit  $\dot{\varphi}(\tau) > 0$  ist auch  $\dot{\varphi}^{-1}(t) > 0$ .
- Aus  $\mathbf{x}(t) \sim \mathbf{x}_1(\tau)$  mit  $t = \varphi(\tau)$  und  $\mathbf{x}_1(\tau) \sim \mathbf{x}_2(\sigma)$  mit  $\tau = \psi(\sigma)$  folgt  $\mathbf{x}(t) \sim \mathbf{x}_2(\sigma)$  mit  $t = \varphi(\psi(\sigma))$ , denn  $\dot{\varphi}(\tau) \dot{\psi}(\sigma) > 0$ .

Entsprechend den beiden Teilklassen besitzt eine Kurve (c) damit zwei Möglichkeiten der Orientierung. Mit der Parametertransformation  $\varphi(\tau) = -\tau$ , die wegen  $\dot{\varphi}(\tau) = -1$  orientierungsumkehrend ist, kann jede regulär parametrisierbare Kurve in die jeweils andere Teilklasse überführt werden. Oft spricht man an Stelle von der Orientierung auch vom Durchlaufsinne einer Kurve. Indem man sich für eine dieser Teilklassen regulärer Parametrisierungen entscheidet, gibt man der Kurve eine **Orientierung** bzw. einen Durchlaufsinne. Wird eine Kurve mit wachsenden Parameterwerten durchlaufen, so entspricht dies einer Bewegung entsprechend der Kurvenorientierung.

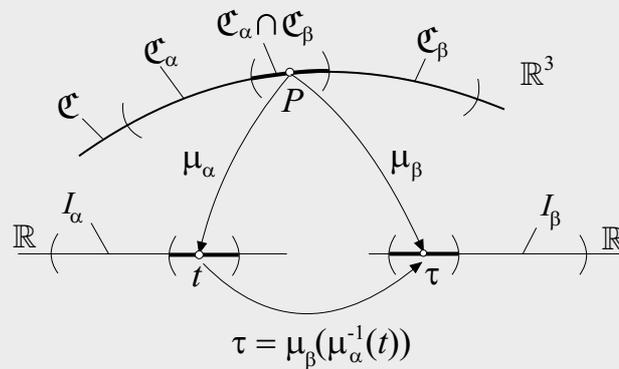
**Definition 3.3** Eine **orientierte Kurve** ist eine Klasse (c) verträglicher Parametrisierungen, die untereinander orientierungserhaltend sind.

Alternativ, aber nicht äquivalent zu den Definitionen 3.1 - 3.3 kann eine Kurve als eindimensionale Mannigfaltigkeit eingeführt werden.

**Definition 3.4** Eine  $C^r$ -Kurve ist eine Punktmenge  $\mathfrak{C}$  des  $\mathbb{R}^3$  zusammen mit folgenden Forderungen (siehe dazu Abb. 3.2):

1. Zu jedem  $P \in \mathfrak{C}$  existiert eine offene Menge  $\mathfrak{C}_\alpha$  mit  $P \in \mathfrak{C}_\alpha$ , so dass gilt

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathfrak{C}_\alpha \quad (\mathcal{I} \text{ Indexmenge}).$$



2. Zu jeder Menge  $\mathfrak{C}_\alpha$  gibt es eine injektive Abbildung  $\mu_\alpha : \mathfrak{C}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $\mu_\alpha(\mathfrak{C}_\alpha) = I_\alpha$  ein offenes Intervall der reellen Zahlen ist.

3. Im Falle  $\mathfrak{C}_\alpha \cap \mathfrak{C}_\beta \neq \emptyset$  und mit den Abbildungen  $\mu_\alpha(\mathfrak{C}_\alpha) = I_\alpha$ ,  $\mu_\beta(\mathfrak{C}_\beta) = I_\beta$  ist  $\mu_\alpha(\mathfrak{C}_\alpha \cap \mathfrak{C}_\beta)$  offen in  $\mathbb{R}$  und die zusammengesetzte Abbildung

$$\mu_\beta(\mu_\alpha^{-1}) : \mu_\alpha(\mathfrak{C}_\alpha \cap \mathfrak{C}_\beta) \subset I_\alpha \rightarrow \mu_\beta(\mathfrak{C}_\alpha \cap \mathfrak{C}_\beta) \subset I_\beta$$

bildet einen  $C^r$ -Diffeomorphismus. Die Abbildungen  $\mu_\alpha$  heißen Karten und die Transformationen  $\mu_\beta(\mu_\alpha^{-1})$  zwischen den Parametrisierungen Kartenwechsel oder Koordinatentransformationen. Man nennt einen Kartenwechsel im Einklang mit Definition 3.2 orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend), wenn gilt

$$\frac{d}{dt}(\mu_\beta(\mu_\alpha^{-1}))(t) > 0 \quad (\text{bzw. } < 0).$$

Die Kurve  $\mathfrak{C}$  heißt orientiert, wenn alle Kartenwechsel orientierungserhaltend sind.

**Bemerkung 3.1** Jede Abbildung  $\mathbf{x}_\alpha \equiv \mu_\alpha^{-1} : I_\alpha \rightarrow \mathfrak{C}_\alpha$  ist eine reguläre Parametrisierung eines Kurvenstückes mit der Spur  $\mathfrak{C}_\alpha$ . Aus der Forderung 2. folgt, dass diese Parametrisierungen nun injektive Immersionen sind. Geht es um die Untersuchung der lokalen Kurvengeometrie, d.h. der Beschreibung von Kurven in Umgebungen ihrer Punkte, so ist es nicht notwendig, von der Definition einer Kurve als Mannigfaltigkeit

auszugehen. Betrachtet man jedoch eine Kurve als globales geometrisches Objekt, so ist es zweckmäßiger, diese als eindimensionale Mannigfaltigkeit zu interpretieren. Im Weiteren werden wir von einer Kurve als einer Klasse ( $\mathbf{c}$ ) gleichorientierter Parametrisierungen bzw. eingeschränkter als Menge  $\mathbf{c}$  (Spur) von Ortsvektoren (Punkten) des EUKLIDischen Raumes  $\mathbb{R}^3$  im Sinne der Definitionen 3.1 -3.3 oder als einer Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{C}$  im Sinne der Definition 3.4 sprechen.

**Beispiel 3.1** Eine Gerade ist eine Kurve mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} ; \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{v} \in \mathbf{V}^3 \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Wegen  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$  ist diese Parametrisierung regulär. Mit jeder bijektiven stetig differenzierbaren Abbildung  $\varphi : \bar{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \left( t = \varphi(\tau) \text{ und } \frac{d\varphi}{d\tau} > 0 \right)$  kann diese Gerade in der Form  $\bar{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{x}_0 + \varphi(\tau)\mathbf{v}$  umparametrisiert werden. Alle Parametrisierungen dieser Art bilden die Gerade ( $\mathbf{g}$ ), deren Spur  $\mathbf{g} = \mathbf{x}(\mathbb{R})$  ist.

**Beispiel 3.2** Ist  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion, so wird über die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad t \in (a, b)$$

eine Kurve in der  $x_1x_2$ -Ebene (Graf der Funktion  $f$ ) mit der Spur

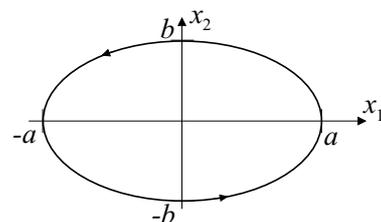
$$\mathbf{c} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}(t); t \in (a, b) \right\}$$

definiert. Wegen  $\dot{\mathbf{x}}(t) = (1, f'(t))^T \neq \mathbf{0}$  ist diese Parametrisierung regulär. Mit jeder bijektiven, stetig differenzierbaren Funktion  $\varphi : (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow (a, b)$  gemäß  $t = \varphi(\tau)$  und  $\dot{\varphi}(\tau) > 0$  kann diese Kurve orientierungstreu umparametrisiert werden:

$$\bar{\mathbf{x}}(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi(\tau) \\ f(\varphi(\tau)) \end{pmatrix}, \quad \tau \in (\bar{a}, \bar{b}).$$

**Beispiel 3.3** Die Randlinie einer **Ellipse** in der  $x_1x_2$ -Ebene mit nach den Koordinatenachsen ausgerichteten Hauptachsen der Längen  $a, b$  ( $a, b > 0$ ) und dem Mittelpunkt im Ursprung besitzt die Spur

$$\mathbf{c} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right\}$$



Eine Möglichkeit der regulären Parametrisierung ist

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Aber auch die Parametrisierungen

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (0, 3\pi) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_2(\tau) = \begin{pmatrix} a \cos(\alpha\tau) \\ b \sin(\alpha\tau) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \tau \in (0, 3\pi) \\ \alpha > 1 \end{matrix}$$

liefern die gleiche Spur  $\mathbf{c}$ . Zwischen den Parametrisierungen besteht zwar der Zusammenhang  $t = \alpha\tau$ , der aber kein Diffeomorphismus von  $(0, 3\pi)$  auf  $(0, 3\pi)$  ist. Es gibt keine bijektive stetig differenzierbare Abbildung  $t = \varphi(\tau)$ , die eine Umparametrisierung von  $\mathbf{x}_2$  im Intervall  $(0, 3\pi)$  auf  $\mathbf{x}_1$  im gleichen Intervall  $(0, 3\pi)$  realisiert. Die Parametrisierungen  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  beschreiben somit, im Sinne der Definition einer Kurve als Klasse zueinander verträglicher (diffeomorpher) Parametrisierungen, verschiedene Kurven  $(\mathbf{c}_1)$  und  $(\mathbf{c}_2)$ . Dieses Beispiel zeigt, dass die Abbildung, die die Klasse  $(\mathbf{c})$  einer Kurve die Spur  $\mathbf{c}$  dieser Kurve zuordnet (d.h.  $(\mathbf{c}) \rightarrow \mathbf{c}$ ), nicht bijektiv oder injektiv, sondern nur surjektiv ist.

Mit  $a = b = 1$  entsteht die Kreislinie  $S^1$  des Einheitskreises in der  $x_1x_2$ -Ebene:

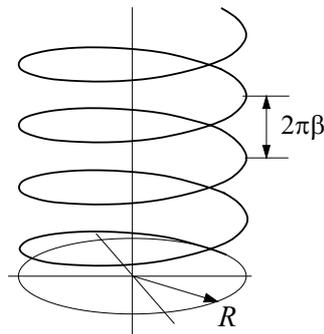
$$S^1 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

mit der Parametrisierung  $\mathbf{x}(t) = (\cos(t), \sin(t))^T \quad (t \in \mathbb{R})$ .

**Beispiel 3.4** Eine in drei Dimensionen verlaufende Kurve ist die **Schraubenlinie** mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\alpha t) \\ R \sin(\alpha t) \\ \beta t \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

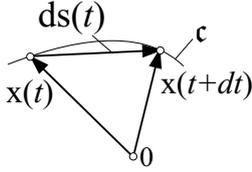
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -R\alpha \sin(\alpha t) \\ R\alpha \cos(\alpha t) \\ \beta \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$



Diese Kurve beschreibt die Windungen einer Schraube.  $R$  ist der Radius und  $2\pi\beta$  die Ganghöhe dieser Schraube. Mit dem Parameter  $\alpha$  kann die "Schnelligkeit" des Durchlaufes der Kurve gesteuert werden. Ist  $\beta > 0$ , so spricht man von einer Rechtsschraube und im Falle  $\beta < 0$  von einer Linksschraube. Mit  $\beta = 0$  entsteht der Spezialfall einer Kreislinie mit dem Radius  $R$ .

## 3.2. Bogenelement und Bogenlänge

Längen auf einer Kurve  $(\mathbf{c})$  mit der regulären Parametrisierung  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  werden mit dem im EUKLIDischen Raum  $\mathbb{R}^3$  definierten Maß  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$  gemessen. Dazu führt man das (differenzielle) **Bogenelement**  $ds$  ein. Ausgehend vom Vektor

$$ds(t) = \mathbf{x}(t+dt) - \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) dt$$

(3.1)

ist

$$ds(t) = \sqrt{(\dot{\mathbf{x}}(t) dt, \dot{\mathbf{x}}(t) dt)} = \sqrt{(\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))} dt = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt.$$

Durch Integration über diese (differenziellen) Bogenelemente erhält man die Länge der Kurve  $(\mathbf{c})$ .

**Definition 3.5** Existiert das Integral

$$L(\mathbf{c}) = \int_I ds(t) = \int_I \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt,$$

so heißt  $L$  **Länge** der Kurve  $(\mathbf{c})$ . Eine Kurve mit endlicher Länge wird **rektifizierbar** genannt.

Diese Definition der Länge einer Kurve erscheint zunächst etwas vage, da sie auf einer konkreten Kurvenparametrisierung beruht. Es ist aber sofort einsichtig, dass die Länge von  $(\mathbf{c})$  nicht von der Parametrisierung abhängt. Denn, ist  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\tau)$  eine andere verträgliche Parametrisierung aus der Klasse  $(\mathbf{c})$ , so ergibt sich mit der Umparametrisierung  $\varphi(\tau) : \bar{I} \rightarrow I$  und dem daraus folgenden Differenzial  $dt = \dot{\varphi}(\tau) d\tau$ :

$$\int_{\bar{I}} \|\dot{\bar{\mathbf{x}}}(\tau)\| d\tau = \int_{\bar{I}} \|\dot{\varphi}(\tau) \dot{\mathbf{x}}(\varphi(\tau))\| d\tau = \int_{\bar{I}} \|\dot{\mathbf{x}}(\varphi(\tau))\| \dot{\varphi}(\tau) d\tau = \int_I \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt.$$

Indem im Intervall  $I$  ein Punkt  $t = a$  festgehalten wird, ist über das Integral

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\| d\tau \quad (a \in I)$$

eine Abbildung  $s : I \rightarrow \bar{I}$  mit  $s = s(t)$  definiert. Diese Abbildung ist offensichtlich streng monoton wachsend und besitzt die Ableitung  $\frac{ds(t)}{dt} = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| > 0$ . Damit folgt, dass die inverse Abbildung

$$s^{-1} \equiv \varphi : \bar{I} \rightarrow I \quad \text{mit } t = \varphi(s) \quad \text{und} \quad \varphi'(s) \equiv \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(\varphi(s))\|} \quad (3.2)$$

einen Diffeomorphismus von  $\bar{I}$  auf  $I$  realisiert und  $\varphi$  eine reguläre orientierungserhaltende Parametertransformation darstellt. Der Parameter  $s$ , den man auch **Parameter der Bogenlänge** nennt, kann deshalb als Kurvenparameter Verwendung finden. Ist  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  eine Parametrisierung von  $(\mathbf{c})$  nach der Bogenlänge  $s$  und  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(t)$  irgend eine andere Parametrisierung der Kurve  $(\mathbf{c})$ , so stehen die Tangentenvektoren  $\dot{\mathbf{x}}(s)$  und  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)$  in der Beziehung

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\bar{\mathbf{x}}}(\varphi(s))}{\|\dot{\bar{\mathbf{x}}}(\varphi(s))\|}.$$

Wegen  $\|\dot{\mathbf{x}}(s)\| = 1$  sind alle Tangentenvektoren einer nach  $s$  parametrisierten Kurve Einheitsvektoren.

**Definition 3.6** Eine Parametrisierung  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  heißt **Parametrisierung nach der Bogenlänge** oder **natürliche Parametrisierung** der Kurve  $(\mathbf{c})$ , wenn für alle  $s \in I$  gilt

$$\|\dot{\mathbf{x}}(s)\| = 1.$$

Die Bezeichnung Parametrisierung nach der Bogenlänge ist insofern berechtigt, weil sich die Parameter  $s$  und  $\sigma$  zweier verträglicher orientierungserhaltender Parametrisierungen mit  $\|\dot{\mathbf{x}}(s)\| = \|\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\| = 1$  nur durch eine Konstante  $d$  gemäß  $\sigma = s + d$  unterscheiden. Die Länge einer natürlich parametrisierten Kurve ist gleich der Länge des Parameterintervalls:

$$L(\mathbf{c}) = \int_I \|\dot{\mathbf{x}}(s)\| ds = \int_I ds = I.$$

**Vereinbarung:** Die Parametrisierung einer Kurve nach der Bogenlänge  $s$  führt zu bedeutenden Vereinfachungen bei der analytischen Beschreibung der Eigenschaften einer Kurve, weshalb sie im Folgenden häufig Verwendung findet. Zur Unterscheidung der Ableitungen einer Parametrisierung der Kurve  $(\mathbf{c})$  nach der Bogenlänge (die stets mit  $s$  bezeichnet wird) von den Ableitungen nach einem beliebigen anderen Parameter (z.B.  $t$ ) wird folgende Vereinbarung getroffen:

Ableitung von  $\mathbf{x}(s)$  nach der Bogenlänge  $s$ :  $\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} \equiv \mathbf{x}'(s)$ ,  $\frac{d^2\mathbf{x}(s)}{ds^2} \equiv \mathbf{x}''(s)$ , ...

Ableitung von  $\mathbf{x}(t)$  nach dem Parameter  $t$ :  $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{x}}(t)$ , ...

Dementsprechend werden zukünftig alle Ableitungen nach dem Parameter  $s$  der Bogenlänge mit Hochkommas bezeichnet, während Ableitungen nach einem beliebigen Parameter  $t$  wie bisher Punkte über dem Funktionssymbol tragen.

**Zusammenhänge zwischen den Ableitungen von  $\mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{x}(s)$ :**

( Parametertransformation:  $t = \varphi(s)$ ,  $s$ -Parameter der Bogenlänge)

Mit

$$t'(s) = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \quad \text{und} \quad t''(s) = \frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^4} \quad (3.3)$$

ist

$$\mathbf{x}'(s) = \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{x}''(s) = \frac{d^2\mathbf{x}(s)}{ds^2} = \frac{(\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)) \times \dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^4} \quad (3.5)$$

Wegen  $1 = \|\mathbf{x}'(s)\|^2 = (\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}'(s))$  ist  $(\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s)) = 0$  und damit  $\mathbf{x}'(s) \perp \mathbf{x}''(s)$ . Die Beweise zu den Formeln (3.3) - (3.5) sind Gegenstand von Aufgabe 1 aus Abschnitt 3.9.

### Beispiel 3.5

a) Eine Gerade  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) ist wegen  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}$  nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn der Richtungsvektor ein Einheitsvektor ist ( d.h.  $\|\mathbf{v}\| = 1$  ).

b) Die Schraubenlinie  $\mathbf{x}(t) = (R \cos(\alpha t), R \sin(\alpha t), \beta t)^T$  hat den Tangentenvektor  $\dot{\mathbf{x}}(t) = (-R\alpha \sin(\alpha t), R\alpha \cos(\alpha t), \beta)^T$  mit  $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = \sqrt{R^2\alpha^2 + \beta^2} = K = \text{const.}$   
Über die Transformation

$$t = \varphi(s) = \frac{s}{K}$$

wird folglich die Schraubenlinie nach dem Bogenmaß parametrisiert.

Beschränkt man  $\mathbf{x}(t)$  auf das Intervall  $(a, b)$ , so besitzt die Schraubenlinie die Länge

$$L = \int_a^b \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{R^2\alpha^2 + \beta^2} dt = (b - a) \sqrt{R^2\alpha^2 + \beta^2}.$$

Im Spezialfall des Einheitskreises  $S^1$  ( $R = \alpha = 1$  und  $\beta = 0$ ) ist  $t = s$  und damit  $S^1$  schon nach der Bogenlänge parametrisiert.

## 3.3. Begleitendes Dreibein und Krümmung

(c) sei eine Kurve, die nach der Bogenlänge gemäß  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisiert ist. Ein Ansatz zur Untersuchung der lokalen Struktur von (c) in der Umgebung eines

Kurvenpunktes  $\mathbf{x}(s_0)$  ( $s_0 \in I$ ) ist die Entwicklung von  $\mathbf{x}(s)$  gemäß der TAYLORSchen Formel nach Potenzen von  $(s - s_0)$ :

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s_0) + \mathbf{x}'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\mathbf{x}''(s_0)(s - s_0)^2 + (s - s_0)^2 \delta(s - s_0).$$

Für das Restglied gilt:  $\lim_{s \rightarrow s_0} \delta(s - s_0) = 0$ .

Die ersten beiden Glieder der rechten Seite definieren die Tangente an  $(\mathbf{c})$  im Punkt  $\mathbf{x}(s_0)$

$$\mathbf{x}_T(s) = \mathbf{x}(s_0) + \mathbf{x}'(s_0)(s - s_0) \quad s \in \mathbb{R}.$$

Nimmt man das nachfolgende Glied noch hinzu, so entsteht die Parabel

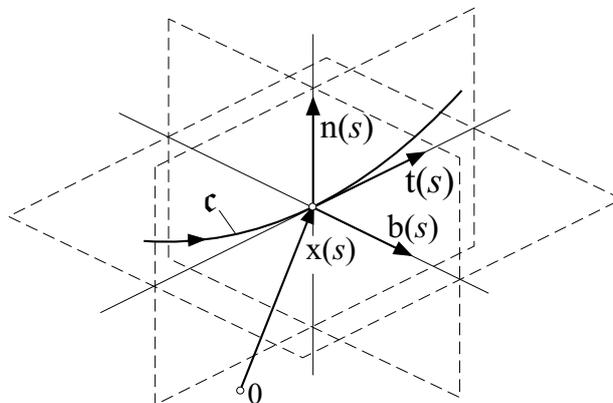
$$\mathbf{x}_P(s) = \mathbf{x}(s_0) + \mathbf{x}'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\mathbf{x}''(s_0)(s - s_0)^2,$$

die  $(\mathbf{c})$  von zweiter Ordnung berührt. D.h.  $\mathbf{x}_P(s)$  und  $\mathbf{x}(s)$  besitzen im Berührungspunkt  $\mathbf{x}(s_0)$  die gleiche erste und zweite Ableitung. Die Tangente schmiegt sich wegen  $\mathbf{x}'(s_0) = \mathbf{x}'_T(s_0)$  von erster Ordnung an  $(\mathbf{c})$  im Punkt  $\mathbf{x}(s_0)$  an.

Die Vektoren  $\mathbf{x}'(s)$  und  $\mathbf{x}''(s)$  sind im Falle  $\mathbf{x}''(s) \neq \mathbf{0}$  linear unabhängig und wegen  $(\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s)) = 0$  auch orthogonal zueinander. Die Ergänzung dieser Vektoren durch ihr Vektorprodukt  $\mathbf{x}'(s) \times \mathbf{x}''(s)$ , welches orthogonal zu  $\mathbf{x}'(s)$  und  $\mathbf{x}''(s)$  ist, führt nach Normierung zu einem orthonormalen System dreier Vektoren, welches jedem Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(s)$  zugeordnet werden kann:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \mathbf{x}'(s) && \text{( Tangentenvektor )} \\ \mathbf{n}(s) &= \frac{\mathbf{x}''(s)}{\|\mathbf{x}''(s)\|} && \text{( Hauptnormalenvektor )} \\ \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) && \text{( Binormalenvektor )} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Das orthonormale System  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  heißt **begleitendes Dreibein** der Kurve  $(\mathbf{c})$  im Punkt  $\mathbf{x}(s)$ . In der Reihenfolge  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  bilden die Vektoren ein Rechtssystem.



**Definition 3.7** Eine  $C^3$ -Kurve  $(\mathbf{c})$ , die nach der Bogenlänge gemäß  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisiert ist, heißt **FRENET-Kurve**, wenn in jedem Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) das begleitende Dreibein  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  existiert und eindeutig bestimmt ist (siehe Abb. 3.6).

In jedem Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(s)$  werden durch das begleitende Dreibein drei aufeinander senkrecht stehende Ebenen definiert. Die vom Tangentenvektor  $\mathbf{t}$  und vom Hauptnormalenvektor  $\mathbf{n}$  aufgespannte Ebene heißt **Schmiegebene**. Von  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{b}$  wird die **Normalebene** und schließlich von  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{t}$  die **rektifizierende Ebene** (oder **Streckebene**) aufgespannt. Bezogen auf den Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(s_0)$  werden die Ortsvektoren  $\mathbf{X}$  dieser Ebenen mittels Spatprodukten durch folgende Gleichungen in parameterfreier Form beschrieben:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X} - \mathbf{x}(s_0), \mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0)] &= 0 && (\text{Schmiegebene}) \\ [\mathbf{X} - \mathbf{x}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)] &= 0 && (\text{Normalebene}) \\ [\mathbf{X} - \mathbf{x}(s_0), \mathbf{b}(s_0), \mathbf{t}(s_0)] &= 0 && (\text{rektifizierende Ebene}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Definition 3.8** Es sei  $(\mathbf{c})$  eine nach der Bogenlänge gemäß  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisierte  $C^3$ -Kurve. Die reelle nicht negative Funktion

$$k : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{gemäß} \quad s \in I \rightarrow k(s) = \|\mathbf{x}''(s)\| \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

heißt **Krümmung** der Kurve  $(\mathbf{c})$ . Den reziproken Wert der Krümmung

$$\rho(s) = \frac{1}{k(s)} = \frac{1}{\|\mathbf{x}''(s)\|} \quad (k(s) \neq 0) \quad (3.9)$$

nennt man **Krümmungsradius**.

**Bemerkung 3.2** Die Kurve  $(\mathbf{c})$  mit der Parametrisierung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) nach Bogenlänge enthält auf dem Teilintervall  $(\alpha, \beta) \subset I$  genau dann ein Geradenstück  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{a}$  ( $s \in (\alpha, \beta)$ ), wenn die Krümmung  $k(s)$  für alle  $s \in (\alpha, \beta)$  verschwindet.

**Beweis.**  $k(s) = 0$  ist gleichbedeutend mit  $\mathbf{x}''(s) = \mathbf{0}$ .

a) Es sei  $\mathbf{x}''(s) = \mathbf{0}$  für alle  $s \in (\alpha, \beta)$ , dann folgt  $\mathbf{x}'(s) = \mathbf{a} = \text{const.}$  und weiter das Geradenstück

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(\alpha) + \int_{\alpha}^s \mathbf{a} \, d\sigma = \mathbf{x}(\alpha) + (s - \alpha)\mathbf{a} \quad \text{für alle } s \in (\alpha, \beta).$$

b) Ist  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{a}$  mit  $s \in (\alpha, \beta) \subset I$  ein Geradenstück, so folgt nach zweimaliger Differenziation  $\mathbf{x}''(s) = \mathbf{0}$ . ■

**Bemerkung 3.3** Ist die Kurve  $(c)$  nicht nach der Bogenlänge parametrisiert, sondern in einer anderen regulären Parametrisierung  $\mathbf{x}(t)$  mit  $t \in I$  gegeben, so erhält man die Krümmung  $k(t)$  im Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(t)$  über folgende Formel:

$$k(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3}. \quad (3.10)$$

**Beweis.** Mit der Parametertransformation  $t = \varphi(s)$  und Formel (3.5) ist

$$k = \frac{\|(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \dot{\mathbf{x}}\|}{\|\dot{\mathbf{x}}\|^4}.$$

Wegen  $(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \perp \dot{\mathbf{x}}$  ist  $\|(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \dot{\mathbf{x}}\| = \|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\| \|\dot{\mathbf{x}}\|$ , womit sofort die angegebene Formel folgt. ■

### Geometrische Interpretation der Krümmung und des Krümmungsradius'

Wir gehen wieder von einer  $C^3$ -Kurve  $(c)$  aus, die nach der Bogenlänge gemäß  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  mit  $s \in I$  parametrisiert ist.  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(s_0)$  ( $s_0 \in I$ ) sei ein beliebiger Kurvenpunkt und  $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}(s_0)$ ,  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(s_0)$  die Vektoren des begleitenden Dreibeins in  $\mathbf{x}_0$ , welche die Schmiegeebene von  $(c)$  in diesem Punkt aufspannen. Weiter seien  $k_0 = k(s_0) = \|\mathbf{x}''(s_0)\|$  und  $\rho_0 = k_0^{-1}$  Krümmung und Krümmungsradius im Kurvenpunkt  $\mathbf{x}_0$ .

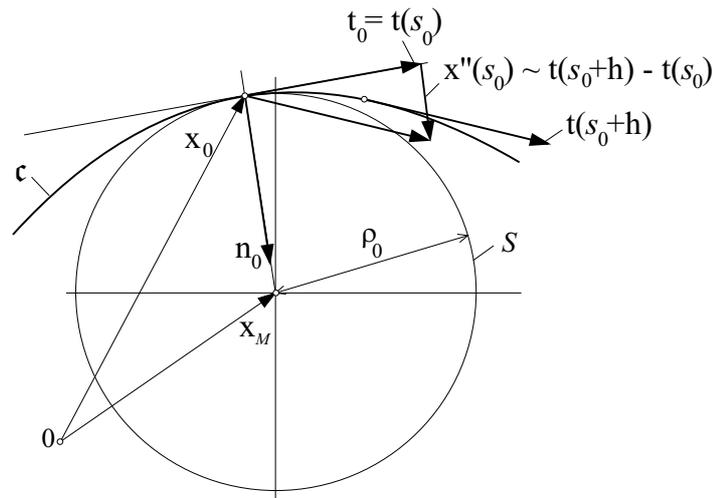
In der Schmiegeebene wird nun ein Kreis  $(S)$  mit dem Radius  $\rho_0$  so platziert, dass er die Kurve  $(c)$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$  berührt und die von  $\mathbf{x}_0$  ausgehende Normale  $\mathbf{n}_0$  zum Mittelpunkt des Kreises weist (siehe Abb. 3.7). Dieser Kreis hat in der Parametrisierung nach seiner Bogenlänge die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_K(s) &= \mathbf{x}_M + \rho_0 \left( \sin\left(\frac{s}{\rho_0}\right) \mathbf{t}_0 - \cos\left(\frac{s}{\rho_0}\right) \mathbf{n}_0 \right) \quad s \in \mathbb{R} \\ \text{mit } \mathbf{x}_M &= \mathbf{x}_0 + \rho_0 \mathbf{n}_0. \end{aligned}$$

Die Ableitungen dieser Parameterdarstellung, berechnet für  $s = 0$ , ergeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_K(0) &= \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(s_0) \\ \mathbf{x}'_K(0) &= \mathbf{t}_0 = \mathbf{x}'(s_0) \\ \mathbf{x}''_K(0) &= \frac{1}{\rho_0} \mathbf{n}_0 = k_0 \mathbf{n}_0 = \mathbf{x}''(s_0). \end{aligned}$$

Die Ableitungen bis zur zweiten Ordnung der beiden nach der Bogenlänge parametrisierten Kurven  $(c)$  und  $(S)$  stimmen also im Punkt  $\mathbf{x}_0$  überein und damit auch ihre Krümmungen. Auf diese Weise kann der Krümmungsradius  $\rho_0$  (d.h. der reziproke Wert der Krümmung  $k_0$ !) im Punkt  $\mathbf{x}_0$  der Kurve  $(c)$  als der Radius eines in der Schmiegeebene liegenden Kreises gedeutet werden, der  $(c)$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$  von zweiter Ordnung berührt.



**Bemerkung 3.4** Eine  $C^3$ -Kurve mit der Parametrisierung  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) ist genau dann eine FRENET-Kurve, wenn in jedem Kurvenpunkt die Vektoren  $\mathbf{x}'(s)$  und  $\mathbf{x}''(s)$  linear unabhängig sind. Dies ist insbesondere in den Kurvenpunkten nicht der Fall, in denen  $\mathbf{x}''(s) = 0$  und demzufolge kein eindeutig bestimmtes begleitendes Dreibein existieren kann.

Ist  $\mathbf{x}''(s) = 0$  auf einem Teilintervall  $(\alpha, \beta) \subset I$ , so hat die Kurve nach Bemerkung 3.2 auf  $(\alpha, \beta)$  einen geradlinigen Verlauf. Verschwindet  $\mathbf{x}''(s)$  in einem isolierten Punkt  $s_0$ , d.h. ist  $\mathbf{x}''(s_0) = 0$  und  $\mathbf{x}''(s) \neq 0$  in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $s_0$ , so kann, muss aber nicht, in  $\mathbf{x}(s_0)$  ein Wendepunkt der Kurve vorliegen (siehe Beispiel 3.9).

**Beispiel 3.6** Die in den Beispielen 3.4 und 3.5 b) beschriebene Schraubenlinie hat nach Bogenlänge parametrisiert die Ableitungen:

$$\mathbf{x}'(s) = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} -R\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{K}s\right) \\ R\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{K}s\right) \\ \beta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}''(s) = \frac{-\alpha^2 R}{K^2} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{K}s\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{K}s\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$K = \sqrt{R^2\alpha^2 + \beta^2}.$$

Für die Krümmung erhält man

$$k(s) = \|\mathbf{x}''(s)\| = \frac{\alpha^2 R}{K^2}$$

und für Tangentialvektor und Hauptnormalenvektor

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s) \quad ; \quad \mathbf{n}(s) = - \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{K}s\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{K}s\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Bildung des Vektorproduktes  $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$  entsteht der Binormalenvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \frac{-1}{K} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -R\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{K}s\right) & R\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{K}s\right) & \beta \\ \cos\left(\frac{\alpha}{K}s\right) & \sin\left(\frac{\alpha}{K}s\right) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{K} \begin{pmatrix} \beta \sin\left(\frac{\alpha}{K}s\right) \\ -\beta \cos\left(\frac{\alpha}{K}s\right) \\ R\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Schraubenlinie besitzt in jedem Kurvenpunkt ein eindeutig bestimmtes begleitendes Dreibein und ist damit eine FRENET-Kurve.

### 3.4. FRENETSche Formeln und Torsion

Für eine Gerade  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}$  kann stets ein starres (nicht eindeutig bestimmtes!) begleitendes Dreibein konstruiert werden, indem der normierte Richtungsvektor  $\mathbf{v}$  (= Tangentenvektor) durch zwei untereinander und zu  $\mathbf{v}$  orthogonale Einheitsvektoren ergänzt wird. Die Ableitungen der so festgelegten Dreibeine nach  $s$  verschwinden folglich. Die Abweichung einer beliebigen Kurve von einer Geraden und damit verbunden eine vollständige Charakterisierung des Verlaufes einer Kurve im Raum kann durch Bildung der Ableitungen der Vektoren des begleitenden Dreibeins nach dem Kurvenparameter  $s$  erreicht werden. Dies führt auf die FRENETSchen Formeln bzw. die Ableitungsgleichungen.

Die nachfolgenden Ausführungen stützen sich auf eine FRENET-Kurve  $(\mathbf{c})$ , die nach der Bogenlänge gemäß  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisiert ist. Das begleitende Dreibein  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  bildet für jedes  $s \in I$  eine orthonormale Basis im  $\mathbb{R}^3$ . Jede auf  $(\mathbf{c})$  definierte Vektorfunktion ist deshalb eindeutig als Linearkombination dieser Vektoren darstellbar. Insbesondere auch die Ableitungen dieser Basisvektoren nach der Bogenlänge  $s$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(s) &= (\mathbf{t}', \mathbf{t}) \mathbf{t}(s) + (\mathbf{t}', \mathbf{n}) \mathbf{n}(s) + (\mathbf{t}', \mathbf{b}) \mathbf{b}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= (\mathbf{n}', \mathbf{t}) \mathbf{t}(s) + (\mathbf{n}', \mathbf{n}) \mathbf{n}(s) + (\mathbf{n}', \mathbf{b}) \mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= (\mathbf{b}', \mathbf{t}) \mathbf{t}(s) + (\mathbf{b}', \mathbf{n}) \mathbf{n}(s) + (\mathbf{b}', \mathbf{b}) \mathbf{b}(s).\end{aligned}$$

In Matrixform ausgedrückt, folgt die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{t}', \mathbf{t}) & (\mathbf{t}', \mathbf{n}) & (\mathbf{t}', \mathbf{b}) \\ (\mathbf{n}', \mathbf{t}) & (\mathbf{n}', \mathbf{n}) & (\mathbf{n}', \mathbf{b}) \\ (\mathbf{b}', \mathbf{t}) & (\mathbf{b}', \mathbf{n}) & (\mathbf{b}', \mathbf{b}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix}.$$

Für die inneren Produkte der Matrixkoeffizienten ergeben sich folgende Werte:

1. Wegen  $(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 1$  für alle  $s$  folgt nach Ableitung sofort

$$(\mathbf{t}', \mathbf{t}) = (\mathbf{n}', \mathbf{n}) = (\mathbf{b}', \mathbf{b}) = 0.$$

2. Aus  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = 0$  folgt  $\frac{d}{ds}(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = (\mathbf{t}', \mathbf{n}) + (\mathbf{t}, \mathbf{n}') = 0$  und damit  $(\mathbf{t}', \mathbf{n}) = -(\mathbf{t}, \mathbf{n}')$ .  
Mit  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s)$  ist  $\mathbf{t}'(s) = \mathbf{x}''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$  und weiter

$$(\mathbf{t}', \mathbf{n}) = k(s)(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = k(s); \quad (\mathbf{n}', \mathbf{t}) = -k(s).$$

3. Aus  $(\mathbf{t}, \mathbf{b}) = 0$  folgt  $\frac{d}{ds}(\mathbf{t}, \mathbf{b}) = (\mathbf{t}', \mathbf{b}) + (\mathbf{t}, \mathbf{b}') = 0$  und damit  $(\mathbf{t}', \mathbf{b}) = -(\mathbf{t}, \mathbf{b}')$  und weiter

$$(\mathbf{t}', \mathbf{b}) = k(s)(\mathbf{n}, \mathbf{b}) = 0; \quad (\mathbf{b}', \mathbf{t}) = 0.$$

4. Aus  $(\mathbf{b}, \mathbf{n}) = 0$  folgt  $\frac{d}{ds}(\mathbf{b}, \mathbf{n}) = (\mathbf{b}', \mathbf{n}) + (\mathbf{b}, \mathbf{n}') = 0$  und damit

$$(\mathbf{n}', \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}', \mathbf{n}).$$

**Definition 3.9** Die nach Bogenlänge  $s$  parametrisierte FRENET-Kurve  $(\mathbf{c})$  besitze das begleitende Dreibein  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ , dann heißt die Funktion

$$w : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{gemäß } s \in I \rightarrow w(s) = (\mathbf{n}', \mathbf{b}) \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

**Windung (oder Torsion)** der Kurve  $(\mathbf{c})$ . Die Gleichungen in der Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & w(s) \\ 0 & -w(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

nennt man **FRENETSche Formeln** oder **Ableitungsgleichungen** der Kurve  $(\mathbf{c})$ .

Sieht man von Vorzeichen ab, so wird der Zusammenhang zwischen  $\{\mathbf{t}', \mathbf{n}', \mathbf{b}'\}$  und  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  für eine FRENET-Kurve nur durch die zwei Funktionen  $k(s)$  und  $w(s)$  beschrieben. Die Krümmung konnte geometrisch durch den Radius eines in der Schmiegeebene liegenden Kreises, der die Kurve von zweiter Ordnung berührt, beschrieben werden. Auch die Windung erlaubt eine geometrische Deutung.

### Geometrische Interpretation der Windung

Wir entwickeln die  $C^4$ -Kurve  $(\mathbf{c})$  mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) in der Umgebung von  $\mathbf{x}(s_0)$  ( $s_0 \in I$ ) gemäß der TAYLORSchen Formel:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= \mathbf{x}(s_0) + \mathbf{x}'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\mathbf{x}''(s_0)(s - s_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\mathbf{x}'''(s_0)(s - s_0)^3 + (s - s_0)^3 \delta(s - s_0), \end{aligned}$$

wobei  $\lim_{s \rightarrow s_0} \delta(s - s_0) = \mathbf{0}$ . Mit den Substitutionen  $\mathbf{x}'(s_0) = \mathbf{t}_0$ ,  $\mathbf{x}''(s_0) = k_0 \mathbf{n}_0$ ,  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(s_0)$  und der zweiten FRENETSchen Formel  $\mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + w\mathbf{b}$  ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'''(s_0) &= \left. \frac{d}{ds} (k(s) \mathbf{n}(s)) \right|_{s=s_0} = k'(s_0) \mathbf{n}(s_0) + k(s_0) \mathbf{n}'(s_0) \\ &= k'(s_0) \mathbf{n}(s_0) + k(s_0) (-k(s_0) \mathbf{t}(s_0) + w(s_0) \mathbf{b}(s_0)) \\ &= k'_0 \mathbf{n}_0 - k_0^2 \mathbf{t}_0 + k_0 w(s_0) \mathbf{b}_0. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die TAYLORSche Formel ein, so entsteht die folgende Darstellung für  $\mathbf{x}(s)$ :

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s_0) + a(s) \mathbf{t}_0 + b(s) \mathbf{n}_0 + c(s) w_0(s_0) \mathbf{b}_0 + (s - s_0)^3 \delta(s - s_0)$$

mit

$$\begin{aligned} a(s) &= (s - s_0) \left( 1 - \frac{1}{6} k_0^2 (s - s_0)^2 \right) \\ b(s) &= \frac{1}{2} (s - s_0)^2 \left( k_0 + \frac{1}{3} k_0' (s - s_0) \right) \\ c(s) &= \frac{1}{6} (s - s_0)^3 k_0. \end{aligned}$$

Die ersten drei Glieder  $\mathbf{x}(s_0) + a(s) \mathbf{t}_0 + b(s) \mathbf{n}_0$  der rechten Seite beschreiben Vektoren aus der Schmiegeebene von  $\mathbf{x}(s)$  im Punkt  $\mathbf{x}(s_0)$ . Sieht man von dem mit  $(s - s_0)^4$  gegen Null strebenden Anteil ab, so wird der Rest von dem orthogonal zur Schmiegeebene stehenden Vektor  $c(s) w(s_0) \mathbf{b}_0$  bestimmt. Die darin auftretende Torsion  $w(s_0)$  gibt an, wie stark die Kurve in der Umgebung von  $\mathbf{x}(s_0)$  aus der Schmiegeebene in den umgebenden Raum herausgedreht wird oder, mit anderen Worten, sich aus der Schmiegeebene "herauswindet".

**Satz 3.1** *Eine nach der Bogenlänge mit  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisierte FRENET-Kurve (c) verläuft genau dann vollständig in einer Ebene des  $\mathbb{R}^3$  (ist also eine **ebene Kurve**), wenn ihre Torsion verschwindet, d.h. wenn  $w(s) = 0$  für alle  $s \in I$ .*

**Beweis.** Aus der dritten FRENETSchen Formel  $\mathbf{b}'(s) = -w(s) \mathbf{n}(s)$  folgt, dass die Bedingung  $w(s) = 0$  äquivalent zu  $\mathbf{b}'(s) = \mathbf{0}$  und damit zu  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b} = \text{const.}$  ist ((c) ist eine FRENET-Kurve und folglich  $\mathbf{n}(s) \neq \mathbf{0}$ !).

a) Es sei  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b} = \text{const.}$  ( $s \in I$ ). Wählt man einen beliebigen Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(s_0)$ , dann ist

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0), \mathbf{b}) = (\mathbf{t}(s), \mathbf{b}) = 0$$

und damit das innere Produkt  $(\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0), \mathbf{b}) = c = \text{const.}$  für alle  $s \in I$ . Für  $s = s_0$  ist insbesondere  $(\mathbf{x}(s_0) - \mathbf{x}(s_0), \mathbf{b}) = 0$ . Also kann nur  $c = 0$  und damit  $\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0) \perp \mathbf{b}$  für alle  $s \in I$  sein. D.h. aber,  $\mathbf{b}$  ist Normalenvektor einer Ebene, in der alle Ortsvektoren  $\mathbf{x}(s)$  der Kurve (c) enden.

b) Liegt die Kurve (c) vollständig in einer Ebene, so können deren Ortsvektoren  $\mathbf{x}(s)$  in der Form

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{a} + \alpha(s) \mathbf{c} + \beta(s) \mathbf{d}$$

mit den zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  und den konstanten Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$  beschrieben werden. Durch Ableitung dieser Darstellung ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(s) &= \alpha'(s) \mathbf{c} + \beta'(s) \mathbf{d} = \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{x}''(s) &= \alpha''(s) \mathbf{c} + \beta''(s) \mathbf{d} = k(s) \mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln folgt, dass die zueinander orthonormalen Vektoren  $\mathbf{t}(s)$  und  $\mathbf{n}(s)$  für jedes  $s \in I$  dem (abgeschlossenen) Unterraum  $\mathbf{V}_{cd} = \overline{\text{span}\{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}} \subset \mathbf{V}^3$  angehören.

Wegen  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$  ist  $\mathbf{b}$  Einheitsvektor und orthogonal zu  $\mathbf{V}_{cd}$  und damit konstant.

■

### Formeln zur Berechnung der Torsion

1. Ist die  $C^3$ -Kurve  $(\mathbf{c})$  nach Bogenlänge gemäß  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisiert, so folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(s) &= \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{x}''(s) &= k(s) \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{x}'''(s) &= k'(s) \mathbf{n}(s) + k(s) \mathbf{n}'(s) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}'(s) = \frac{1}{k(s)} (\mathbf{x}'''(s) - k'(s) \mathbf{n}(s)) \\ \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \frac{1}{k(s)} (\mathbf{x}'(s) \times \mathbf{x}''(s)).\end{aligned}$$

Mit  $k(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|$  ergibt sich

$$\begin{aligned}w(s) &= (\mathbf{b}(s), \mathbf{n}'(s)) = \frac{1}{k(s)} (\mathbf{b}(s), \mathbf{x}'''(s) - k'(s) \mathbf{n}(s)) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x}''(s)\|} (\mathbf{b}(s), \mathbf{x}'''(s)) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x}''(s)\|^2} (\mathbf{x}'(s) \times \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}'''(s)).\end{aligned}$$

Unter Verwendung des Spatproduktes entsteht schließlich

$$w(s) = \frac{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}'''(s)]}{\|\mathbf{x}''(s)\|^2}. \quad (3.13)$$

2. Für eine  $C^3$ -Kurve  $(\mathbf{c})$  in beliebiger regulärer Parametrisierung  $\mathbf{x}(t)$  ( $t \in I$ ) mit der Parametertransformation  $t = \varphi(s)$  ist zunächst

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(s) &= \dot{\mathbf{x}}(t) \varphi'(s) \\ \mathbf{x}''(s) &= \ddot{\mathbf{x}}(t) (\varphi'(s))^2 + \dot{\mathbf{x}}(t) \varphi''(s) \\ \mathbf{x}'''(s) &= \ddot{\mathbf{x}}(t) (\varphi'(s))^3 + 3\dot{\mathbf{x}}(t) \varphi'(s) \varphi''(s) + \ddot{\mathbf{x}}(t) \varphi'''(s).\end{aligned}$$

Substituiert man die Ableitungen im Spatprodukt  $[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}'''(s)]$  durch die rechten Seiten dieser Gleichungen, so folgt aus den Eigenschaften des Spatproduktes (bzw. aus Eigenschaften der Determinante) der Zusammenhang

$$[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}'''(s)] = (\varphi'(s))^6 [\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)].$$

Mit der Formel (3.10) für  $k(t)$  und mit (3.2) für  $\varphi'(s)$  erhält man

$$w(t) = \frac{[\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)]}{\|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\|^2}. \quad (3.14)$$

**Beispiel 3.7** Mit den im Beispiel 3.6 angegebenen Vektoren des begleitenden Dreibeins der Schraubenlinie kann die Torsion dieser Kurve über

$$\mathbf{n}'(s) = \frac{\alpha}{K} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\alpha}{K}s\right) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{K}s\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}(s) = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} \beta \sin\left(\frac{\alpha}{K}s\right) \\ -\beta \cos\left(\frac{\alpha}{K}s\right) \\ R\alpha \end{pmatrix}$$

direkt berechnet werden:

$$w(s) = \frac{\alpha\beta}{K^2}.$$

Zusammen mit der Krümmung  $k(s) = \frac{\alpha^2 R}{K^2}$  (siehe Beispiel 3.6) ergeben sich die FRENETschen Formeln

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{K^2} \begin{pmatrix} 0 & \alpha R & 0 \\ -\alpha R & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

### 3.5. Hauptsatz der Kurventheorie

Für jede FRENET-Kurve  $(\mathbf{c})$  mit der Parametrisierung  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) nach der Bogenlänge  $s$  existiert in jedem Kurvenpunkt ein eindeutig bestimmtes begleitendes Dreibein  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ . Mit diesen drei Vektoren sind die Krümmung  $k(s) = (\mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s))$  und die Windung  $w(s) = (\mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s))$  von  $(\mathbf{c})$  berechenbar und damit die FRENETschen Formeln bestimmt. Inhalt des Hauptsatzes der Kurventheorie ist die Umkehrung dieses Sachverhaltes: Unter welchen Bedingungen sind vorgegebene Funktionen  $k(s)$  und  $w(s)$  ( $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w: I \rightarrow \mathbb{R}$ ) Krümmung und Windung einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve  $(\mathbf{c})$ ? Wir werden sehen, dass eine Kurve, deren Krümmung und Windung allein durch hinreichend glatte derartige Funktionen vorgegeben werden, bis auf EUKLIDISCHE Bewegungen im  $\mathbb{R}^3$ , also bis auf starre Drehungen und Translationen im Raum, schon eindeutig bestimmt ist. Wählt man also Bedingungen, unter denen die Lage einer Kurve im Raum fixiert ist, so ist diese Kurve durch ihre Krümmung und Windung eindeutig festgelegt.

Zum Beweis des Hauptsatzes wird eine grundlegende Aussage zur Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungssysteme benötigt, die im folgenden Satz zusammengefasst ist.

**Satz 3.2** Es sei  $\mathbf{F}: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  eine auf dem offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Abbildung gemäß

$$s \in I \rightarrow \mathbf{F}(s) = \{F_{ij}(s)\}_{i,j=1}^3 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

und  $s_0 \in I$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  fest gewählte Größen. Dann gibt es genau eine stetig differenzierbare Abbildung  $\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(s) &= \mathbf{F}(s) \cdot \mathbf{x}(s) & s \in I \\ \mathbf{x}(s_0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen bezeichnet man als Anfangswertproblem (AWP) für die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung  $\mathbf{x}'(s) = \mathbf{F}(s) \cdot \mathbf{x}(s)$  mit den Anfangswerten  $\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}_0$ .

Ausführungen zu Anfangswertproblemen für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen findet man z.B. in [MeVa] Bd. 2, S. 93 - 102.

**Satz 3.3 (Hauptsatz der Kurventheorie)**

Auf dem offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  seien die stetig differenzierbaren Funktionen  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $w : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $k(s) > 0$  für alle  $s \in I$  definiert. Weiterhin seien einem Parameterwert  $s_0 \in I$  ein fester Raumpunkt  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  und ein orthonormales Rechtssystem von Vektoren  $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$  zugeordnet.

Dann existiert eine eindeutig bestimmte FRENET-Kurve, die nach der Bogenlänge gemäß  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisiert ist und

- a) die Krümmung  $k(s)$  und Torsion  $w(s)$  und
- b) im Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}_0$  das begleitende Dreibein

$$\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{t}_0, \quad \mathbf{n}(s_0) = \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{b}(s_0) = \mathbf{b}_0$$

besitzt.

**Beweis.** Zunächst wird eine  $3 \times 3$ -Matrixfunktion  $\mathbf{B}(s) = \{B_{ij}(s)\}_{i,j=1}^3$  für alle  $s \in I$  eingeführt, wobei  $\mathbf{B}(s_0) \equiv \mathbf{B}_0 = (\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)^T$  die Matrix ist, deren Zeilen die Vektoren des vorgegeben orthonormalen Systems  $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$  sind.  $\mathbf{B}_0$  ist folglich eine orthogonale Matrix mit  $\det(\mathbf{B}_0) = 1$ . Die Matrixfunktion  $\mathbf{B}(s)$  wird aus dem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{B}'(s) = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{B}(s) \quad (s \in I) \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & w(s) \\ 0 & -w(s) & 0 \end{pmatrix}$$

und den Anfangsbedingungen  $\mathbf{B}(s_0) = \mathbf{B}_0$  bestimmt. Unter der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von  $k(s)$  und  $w(s)$  besitzt dieses AWP nach Satz 3.2 eine eindeutig bestimmte Lösung  $\mathbf{B}(s)$  ( $s \in I$ ).

Bemerkt sei, dass das hier formulierte AWP aus drei Problemen der im Satz 3.2 genannten Art besteht, die über die Matrixformulierung der Lösung  $\mathbf{B}(s)$  in einer Gleichung zusammengefasst sind.

a) Als erstes wird gezeigt, dass  $\mathbf{B}(s)$  für alle  $s \in I$  eine orthogonale Matrix ist. Mit  $\mathbf{B}' = \mathbf{A}\mathbf{B}$  folgt nach der Produktregel der Differenziation

$$(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)' = \mathbf{B}'\mathbf{B}^T + \mathbf{B}(\mathbf{B}^T)' = \mathbf{B}'\mathbf{B}^T + \mathbf{B}(\mathbf{B}')^T = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T. \quad (3.15)$$

Setzt man  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{B}^T(s)$ , so ist wegen der Orthogonalität von  $\mathbf{B}(s_0) = \mathbf{B}_0$  die Matrix  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}(s_0) = \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T = \mathbf{I}$  die  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix im  $\mathbb{R}^3$ . Die Beziehung (3.15) wird nun als Differenzialgleichungssystem

$$\mathbf{G}'(s) = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{G}(s) + \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{A}^T(s) \quad (s \in I)$$

für die Matrixfunktion  $\mathbf{G}(s)$  mit den Anfangsbedingungen  $\mathbf{G}(s_0) = \mathbf{G}_0$  aufgefasst. Die Einheitsmatrix  $\mathbf{I}(s) \equiv \mathbf{I}$  ist wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{I}(s) + \mathbf{I}(s) \cdot \mathbf{A}^T(s) &= \mathbf{A}(s) + \mathbf{A}^T(s) = \mathbf{0} = \mathbf{I}'(s) \\ &(\mathbf{A} \text{ ist antisymmetrisch!}) \end{aligned}$$

eine Lösung dieses AWP's. Andererseits erfüllt dieses AWP aber auch die Bedingungen des Satzes 3.2 und ist deshalb eindeutig lösbar. Damit ist  $\mathbf{I} = \mathbf{G}(s) = \mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{B}^T(s)$  für alle  $s \in I$  die einzige Lösung und folglich  $\mathbf{B}(s)$  für jedes  $s \in I$  eine orthogonale Matrix mit  $\det(\mathbf{B}(s)) = 1$  (da  $\det(\mathbf{B}_0) = 1$  und  $\mathbf{B}(s)$  stetig!).

b) Die Zeilenvektoren der Matrix  $\mathbf{B}(s)$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= (B_{11}(s), B_{12}(s), B_{13}(s))^T \\ \mathbf{n}(s) &= (B_{21}(s), B_{22}(s), B_{23}(s))^T \\ \mathbf{b}(s) &= (B_{31}(s), B_{32}(s), B_{33}(s))^T \end{aligned} \quad (s \in I)$$

bilden für jedes  $s \in I$  ein orthonormales Rechtssystem und die Gleichung  $\mathbf{B}'(s) = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{B}(s)$  stellt in kompakter Form die FRENETSchen Formeln mit den vorgegebenen Funktionen  $k(s)$  und  $w(s)$  dar. Damit bildet das System  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  für jedes  $s \in I$  ein begleitendes Dreibein für die noch zu konstruierende Kurve  $(\mathbf{c})$ .

c) Wegen  $\mathbf{x}'(s) = \mathbf{t}(s)$ , der Stetigkeit von  $\mathbf{t}(s)$  und mit  $\mathbf{x}'(s_0) = \mathbf{t}(s_0) = \mathbf{t}_0$  kann eine Parameterdarstellung von  $(\mathbf{c})$  durch Integration dieses Zusammenhanges bezüglich  $s$  hergeleitet werden

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + \int_{s_0}^s \mathbf{t}(\sigma) d\sigma \quad (s \in I).$$

Dies ist wegen  $\|\mathbf{t}(s)\| = 1$  für alle  $s$  eine Parametrisierung von  $(\mathbf{c})$  nach der Bogenlänge. Weiterhin ist  $\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}'(s) = \mathbf{t}(s)$  der Tangentenvektor. Aus der ersten FRENETSchen Formel  $\mathbf{t}'(s) = k(s) \mathbf{n}(s) \neq \mathbf{0}$  und wegen  $k(s) > 0$  folgt schließlich für den Hauptnormalenvektor  $\mathbf{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \mathbf{x}''(s)$ .

d) Beweis der Eindeutigkeit von  $(\mathbf{c})$ . Wir nehmen an, es existiere eine von  $(\mathbf{c})$  verschiedene Kurve  $(\bar{\mathbf{c}})$  mit der Parametrisierung  $\bar{\mathbf{x}}(s)$  ( $s \in I$ ), die ebenfalls die Bedingungen und Aussagen des Satzes erfüllt. Es seien  $\bar{\mathbf{B}}(s) = (\bar{\mathbf{t}}(s), \bar{\mathbf{n}}(s), \bar{\mathbf{b}}(s))^T$  mit  $\bar{\mathbf{B}}(s_0) = \mathbf{B}_0$  die Matrixfunktion des begleitenden Dreibeins und  $\bar{\mathbf{B}}'(s) = \mathbf{A}(s) \cdot \bar{\mathbf{B}}(s)$  die FRENETSchen Formeln der Parametrisierung  $\bar{\mathbf{x}}(s)$ . Die Matrixfunktion  $\mathbf{D}(s) = \mathbf{B}(s) - \bar{\mathbf{B}}(s)$  ist dann Lösung des gewöhnlichen Differenzialgleichungssystems  $\mathbf{D}'(s) = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{D}(s)$  mit den Anfangsbedingungen  $\mathbf{D}'(s_0) = \mathbf{B}(s_0) - \bar{\mathbf{B}}(s_0) = \mathbf{0}$ . Nach Satz 3.2 ist die Lösung dieses AWP's eindeutig bestimmt und wegen der Anfangsbedingungen muss  $\mathbf{D}(s) \equiv \mathbf{0}$  sein. Damit besitzen  $(\mathbf{c})$  und  $(\bar{\mathbf{c}})$  für alle  $s \in I$  ein und dasselbe

begleitende Dreibein. Insbesondere ist  $\bar{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{t}(s)$  und deshalb

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \int_{s_0}^s \bar{\mathbf{t}}(\sigma) d\sigma = \mathbf{x}_0 + \int_{s_0}^s \mathbf{t}(\sigma) d\sigma = \mathbf{x}(s) \quad \text{für alle } s \in I.$$

Beide Parametrisierungen sind folglich gleich, woraus auf die Identität von  $(\mathbf{c})$  und  $(\bar{\mathbf{c}})$  geschlossen werden kann. ■

**Bemerkung 3.5** *Unterwirft man die Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) einer Kurve  $(\mathbf{c})$  einer EUKLIDischen Bewegung  $\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}(s) + \mathbf{b}$  mit der orthogonalen Matrix  $\mathbf{Q}$  ( $\det(\mathbf{Q}) = 1$ ) und dem festen Vektor  $\mathbf{b}$ , so ist  $\bar{\mathbf{x}}(s)$  Parameterdarstellung einer Kurve  $(\bar{\mathbf{c}})$ , wobei beide Kurven  $(\mathbf{c})$  und  $(\bar{\mathbf{c}})$  für alle  $s \in I$  die gleiche Krümmung und Torsion besitzen ( $k(s) = \bar{k}(s)$ ,  $w(s) = \bar{w}(s)$ ) und zwischen den Vektoren der begleitenden Dreibeine  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  und  $\{\bar{\mathbf{t}}(s), \bar{\mathbf{n}}(s), \bar{\mathbf{b}}(s)\}$  bestehen die Beziehungen*

$$\bar{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{t}(s), \quad \bar{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}(s), \quad \bar{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}(s) \quad (s \in I).$$

Diese Zusammenhänge ergeben sich sofort durch Ableitung von  $\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}(s) + \mathbf{b}$  und aus der Orthogonalität von  $\mathbf{Q}$ .

$$\bar{\mathbf{x}}'(s) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}'(s), \quad \bar{\mathbf{x}}''(s) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}''(s), \quad \bar{\mathbf{x}}'''(s) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}'''(s)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}}(s) &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{t}(s) \\ \bar{k}(s) &= \|\bar{\mathbf{x}}''(s)\| = \|\mathbf{Q}\mathbf{x}''(s)\| = \|\mathbf{x}''(s)\| = k(s) \\ \bar{\mathbf{n}}(s) &= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{x}}''(s)\|} \bar{\mathbf{x}}''(s) = \frac{1}{\|\mathbf{x}''(s)\|} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}''(s) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}(s) \\ \bar{\mathbf{b}}(s) &= \bar{\mathbf{t}}(s) \times \bar{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}(s) \\ \bar{w}(s) &= (\bar{\mathbf{n}}'(s), \bar{\mathbf{b}}(s)) = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}'(s), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}(s)) = (\mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s)) = w(s). \end{aligned}$$

Verzichtet man im Hauptsatz der Kurventheorie auf die Vorgabe von  $\mathbf{x}_0$  und  $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ , so erhält man als Lösung eine Schar von Kurven, die alle die gleiche Krümmung und Torsion aufweisen und über eine EUKLIDische Bewegung aufeinander abgebildet werden können.

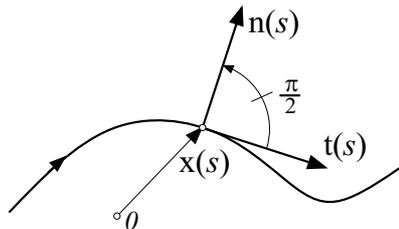
## 3.6. Ebene Kurven

In diesem Abschnitt sei die Kurve  $(\mathbf{c})$  wieder nach der Bogenlänge gemäß  $\bar{\mathbf{x}}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisiert. Nach Satz 3.1 liegt die Spur  $\mathbf{c}$  dieser Kurve genau dann in einer Ebene, wenn die Torsion  $w(s)$  verschwindet bzw. gleichbedeutend damit der Binormalenvektor  $\mathbf{b}$  konstant ist. Die Schmiegebenen zu allen Kurvenpunkten fallen dann zusammen und bilden die Ebene, in der  $(\mathbf{c})$  verläuft. Mit EUKLIDischen Bewegungen kann eine ebene Kurve stets in eine (deckungsgleiche) Kurve in der  $x_1x_2$ -Ebene abgebildet

werden. Ebene Kurven können deshalb im EUKLIDischen Raum  $\mathbb{R}^2$  mit dem Translationsraum  $\mathbf{V}^2$  untersucht werden. Der Binormalenvektor steht dann im Raum senkrecht auf der  $x_1x_2$ -Ebene und sei unabhängig von der Kurvenorientierung  $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$ . Mit dem Tangentenvektor

$$\mathbf{x}'(s) = \mathbf{t}(s) = \begin{pmatrix} t_1(s) \\ t_2(s) \end{pmatrix} \quad (s \in I)$$

ist dann der orthogonal zu  $\mathbf{t}(s)$  orientierte Normalenvektor durch

$$\mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = \begin{pmatrix} -t_2(s) \\ t_1(s) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$


eindeutig bestimmt. Der Normalenvektor entsteht also aus dem um  $\frac{\pi}{2}$  entgegen dem Uhrzeigersinn gedrehten Tangentenvektor.

Wegen  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = 0$  und  $\|\mathbf{t}\| = \|\mathbf{n}\| = 1$  bildet  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$  für jedes  $s \in I$  im  $\mathbb{R}^2$  ein orthonormales Rechtssystem. Es gilt natürlich weiterhin  $\mathbf{t}(s) \perp \mathbf{x}''(s)$ , woraus die Parallelität von  $\mathbf{x}''(s)$  zu  $\mathbf{n}(s)$  folgt.  $\mathbf{x}''(s)$  hat deshalb die Darstellung  $\mathbf{x}''(s) = (x''(s), \mathbf{n}(s)) \mathbf{n}(s)$ .

Aus dem Zusammenhang zwischen  $\mathbf{x}''(s)$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{n}(s)$  leiteten wir die Krümmung einer Kurve ab. Im allgemeinen dreidimensionalen Fall wird zunächst  $\mathbf{x}''(s)$  berechnet und daraus nach Normierung der Normalenvektor abgeleitet. Der nicht negative Wert der Norm  $\|\mathbf{x}''(s)\|$  ist dann die Krümmung der Kurve. Im Fall einer ebenen Kurve geht man anders vor und definiert ihre Krümmung vorzeichenbehaftet. Der Normalenvektor ist hier durch die vorgegebene Drehung aus dem Tangentenvektor schon festgelegt und damit auch die Beziehung  $\mathbf{x}'' = (x'', \mathbf{n}) \mathbf{n}$  zwischen  $\mathbf{x}''$  und  $\mathbf{n}$ . Daraus folgt die Definition der Krümmung einer ebenen Kurve.

**Definition 3.10** Die ebene  $C^2$ -Kurve  $(\mathbf{c})$  sei nach der Bogenlänge gemäß  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisiert, dann heißt die Größe

$$k(s) = (x''(s), \mathbf{n}(s)) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}'(s) \quad (s \in I) \quad (3.17)$$

(orientierte) **Krümmung** der Kurve  $(\mathbf{c})$ .

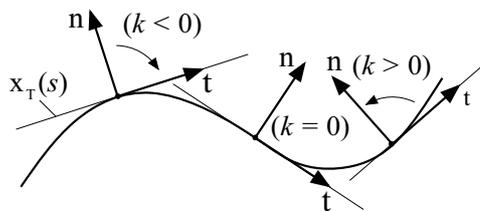
**Bemerkung 3.6** Für ebene Kurven gilt weiter die allgemeine Beziehung

$$\mathbf{x}''(s) = k(s) \mathbf{n}(s)$$

und damit  $\|\mathbf{x}''(s)\| = |k(s)| = |(\mathbf{x}''(s), \mathbf{n}(s))|$ . Der mögliche Vorzeichenwechsel von  $k(s)$  beim Durchlaufen einer ebenen Kurve ergibt sich nur aus der geänderten Festlegung des Normalenvektors gegenüber dem allgemeinen räumlichen Fall.

**Bemerkung 3.7** Der tiefere Sinn für die Einführung einer jetzt vorzeichenbehafteten Krümmung liegt in einer zusätzlichen Charakterisierung des Verlaufes ebener Kurven, die für räumliche Kurven in dieser Weise nicht möglich ist. Mittels der Krümmung kann nun beurteilt werden, in welche Richtung sich der Tangentenvektor an eine Kurve in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Kurvenpunktes dreht, denn es gilt (siehe Abb. 3.9):

- $k(s) > 0$ : Drehung des Tangentenvektors entgegen dem Uhrzeigersinn.
- $k(s) < 0$ : Drehung des Tangentenvektors im Uhrzeigersinn.
- $k(s) = 0$ : Es liegt möglicherweise ein Wendepunkt vor.



Zum Nachweis dieser Beziehungen halten wir einen Kurvenpunkt  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(s_0)$  zum Parameterwert  $s_0 \in I$  mit der Krümmung  $k_0 = (\mathbf{x}''(s_0), \mathbf{n}(s_0))$  fest und legen in diesem Punkt die Tangente  $\mathbf{x}_T(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'(s_0)(s - s_0)$  an die Kurve. Dann folgt über die Entwicklung von  $\mathbf{x}(s)$  gemäß der TAYLORSchen Formel:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_T(s), \mathbf{n}(s_0)) &= \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{x}''(s_0), \mathbf{n}(s_0)) + \bar{\delta}(s - s_0) \right] (s - s_0)^2 \\ &= \left( \frac{1}{2} k_0 + \bar{\delta}(s - s_0) \right) (s - s_0)^2. \end{aligned}$$

Wegen  $\lim_{s \rightarrow s_0} \bar{\delta}(s - s_0) = 0$  liest man aus diesem Zusammenhang für alle  $s \neq s_0$  aus einer hinreichend kleinen Umgebung von  $s_0$  folgende Relationen ab:

$$\begin{aligned} k_0 > 0 &\Leftrightarrow (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_T(s), \mathbf{n}(s_0)) > 0 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_T(s), \mathbf{n}(s_0)) < \frac{\pi}{2} \\ k_0 < 0 &\Leftrightarrow (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_T(s), \mathbf{n}(s_0)) < 0 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_T(s), \mathbf{n}(s_0)) > \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Der Tangentenvektor wird deshalb im Falle  $k_0 > 0$  (bzw.  $k_0 < 0$ ) auf  $\mathbf{n}$  zu und damit entgegen dem Uhrzeigersinn (bzw. von  $\mathbf{n}$  weg und damit im Uhrzeigersinn) gedreht. Ist auf einem Kurvenstück  $k(s) > 0$  ( $k(s) < 0$ ), so spricht man auch von einem **konvexen (konkaven) Kurvenverlauf**. Ein Kurvenpunkt mit  $k(s) = 0$ , in dem ein Wechsel von konvexem zu konkavem Kurvenverlauf oder umgekehrt stattfindet, heißt **Wendepunkt**.

**Bemerkung 3.8** Ist die ebene  $C^2$ -Kurve  $(\mathbf{c})$  in einer beliebigen Parametrisierung  $\mathbf{x}(t)$  ( $t \in I$ ) mit der Transformation  $t = \varphi(s)$  zum Parameter der Bogenlänge  $s$  gegeben, so ist die Krümmung  $k(t)$  aus der Formel

$$k(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3} \left| \begin{array}{cc} \dot{x}_1(t) & \ddot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) & \ddot{x}_2(t) \end{array} \right| = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3} (\dot{x}_1(t) \ddot{x}_2(t) - \dot{x}_2(t) \ddot{x}_1(t)) \quad (3.18)$$

mit  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)^T$  und  $\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2)^T$  berechenbar.

**Beweis.** Über die Formeln (3.16) und (3.3) erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(s) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}'(s) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}''(s) &= \ddot{\mathbf{x}}(t) (\varphi'(s))^2 + \dot{\mathbf{x}}(t) \varphi''(s) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^2} \ddot{\mathbf{x}}(t) - \frac{(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^4} \dot{\mathbf{x}}(t). \end{aligned}$$

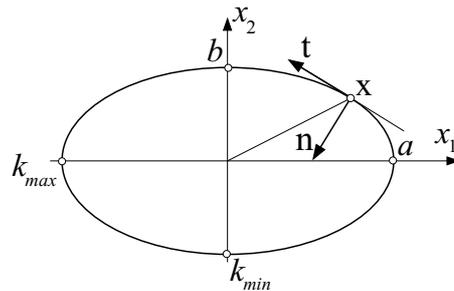
Wegen  $\mathbf{n} \perp \dot{\mathbf{x}}$  folgt dann

$$(\mathbf{x}''(s), \mathbf{n}(s)) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3} \left( \ddot{\mathbf{x}}(t), \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \right).$$

Das rechts stehende innere Produkt kann in diesem Fall als  $(2, 2)$ -Determinante geschrieben werden. ■

**Beispiel 3.8** Die Randkurve einer Ellipse besitzt die Standardparametrisierung (siehe Beispiel 3.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \\ (a &\geq b > 0). \end{aligned}$$



Mit den beiden Ableitungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{x}(t)$$

erhält man den Tangenten- und Normalenvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(t) &= \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{n}(t) = \frac{-1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \begin{pmatrix} b \cos(t) \\ a \sin(t) \end{pmatrix} \\ \text{mit } \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| &= (a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{1/2} \end{aligned}$$

sowie die Krümmung

$$k(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3} \begin{vmatrix} -a \sin(t) & -a \cos(t) \\ b \cos(t) & -b \sin(t) \end{vmatrix} = \frac{ab}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3}.$$

Aus dieser Formel für  $k(t)$  ist ersichtlich, dass die Extremwerte der Krümmung in den Scheitelpunkten der Ellipse auftreten. Die Krümmung erreicht für  $t = m\pi$  ihren maximalen Wert  $k_{\max} = \frac{a}{b^2}$  und für  $t = (m + \frac{1}{2})\pi$  ihr Minimum mit  $k_{\min} = \frac{b}{a^2}$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ).

**Beispiel 3.9** Die ebene Kurve  $(\mathbf{c})$  habe die reguläre Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (t \in I)$$

mit der zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Da keine Parametrisierung nach Bogenlänge vorliegt, erhält man mit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{f}(t) \end{pmatrix}$$

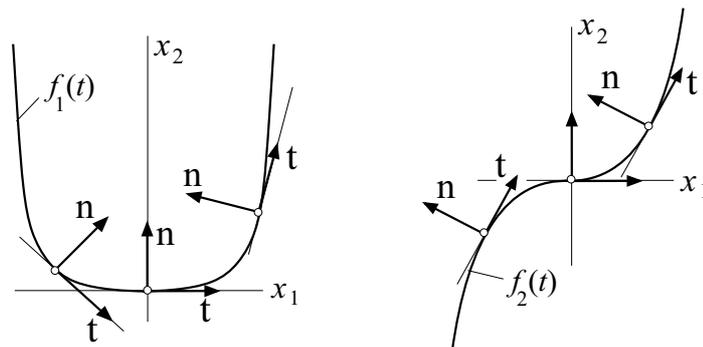
Tangentenvektor und Normalenvektor von  $(\mathbf{c})$  in der Form

$$\mathbf{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\dot{f}(t))^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\dot{f}(t))^2}} \begin{pmatrix} -\dot{f}(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und weiter die Krümmung

$$k(t) = \frac{1}{\left(1 + (\dot{f}(t))^2\right)^{3/2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dot{f}(t) & \ddot{f}(t) \end{vmatrix} = \frac{\ddot{f}(t)}{\left(1 + (\dot{f}(t))^2\right)^{3/2}}.$$

Zu beachten ist, dass  $k(t)$  und  $\ddot{f}(t)$  stets das gleiche Vorzeichen besitzen. Anhand der Funktionen  $f_1(t) = t^4$  und  $f_2(t) = t^3$  kann das Verhalten der entsprechenden Kurven  $(\mathbf{c}_1)$  und  $(\mathbf{c}_2)$  in Kurvenpunkten mit verschwindender Krümmung studiert werden (siehe Abb. 3.11).



a) Für  $f_1(t) = t^4$  ist

$$k_1(t) = \frac{12t^2}{(1+16t^6)^{3/2}} \begin{cases} = 0 & \text{für } t = 0 \\ > 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

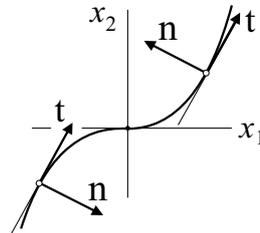
Bezieht man den Grenzfall  $k_1(0) = 0$  mit ein, so besitzt diese Kurve einen konvexen Kurvenverlauf. Der Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  ist folglich kein Wendepunkt.

b) Für  $f_2(t) = t^3$  ist

$$k_2(t) = \frac{6t}{(1+9t^4)^{3/2}} \begin{cases} < 0 & \text{für } t < 0 \\ = 0 & \text{für } t = 0 \\ > 0 & \text{für } t > 0 \end{cases} .$$

Mit wachsendem  $t$  geht diese Kurve bei  $t = 0$  von einem konkaven zu einem konvexen Verlauf über (siehe Abb. 3.11). Der Punkt  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  ist deshalb ein Wendepunkt der Kurve.

Der Unterschied in der Definition des Normalenvektors  $\mathbf{n}$  und der Krümmung  $k$  im ebenen und räumlichen Fall wird an dieser Kurve besonders deutlich. Gemäß der Definition des Normalenvektors für ebene Kurven zeigt  $\mathbf{n}(t)$  längs der gesamten Kurve einen stetigen Verlauf. Demgegenüber wechselt der Normalenvektor gemäß der Definition für räumliche Kurven  $\left( \mathbf{n}(s) = \frac{1}{|k(s)|} \mathbf{x}''(s) \right)$  beim Überschreiten des Parameterwertes  $t = 0$  die Richtung der Orientierung und existiert folglich für  $t = 0$  nicht (siehe Abb. 3.12).



Die FRENETSchen Formeln bleiben für ebene Kurven auf die Vektoren  $\mathbf{t}(s)$  und  $\mathbf{n}(s)$  des begleitenden Dreibeins beschränkt und sind in der kompakten Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

darstellbar.

Der Hauptsatz der Kurventheorie kann für ebene Kurven wie folgt präzisiert werden: Eine eben nach der Bogenlänge gemäß  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisierte Kurve ( $\mathbf{c}$ ) ist bis auf EUKLIDISCHE Bewegungen in der Ebene eindeutig durch eine stetig differenzierbare Funktion  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  (Krümmungsfunktion) bestimmt.

Man kann sogar eine Formel zur expliziten Bestimmung der Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(s)$  für ( $\mathbf{c}$ ) angeben. Bei der folgenden Herleitung halten wir uns eng an die Ausführungen in [Kühn]. Die zu konstruierende Kurve ( $\mathbf{c}_0$ ) mit der vorgegebenen Krümmungsfunktion  $k(s)$  soll für einen Parameterwert  $s_0 \in I$  durch den Ursprung  $\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{0}$  verlaufen

und in diesem Punkt den Tangentenvektor  $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}(s_0) = \mathbf{e}_1 \equiv (1, 0)^T$  besitzen. Der Tangentenvektor von  $(\mathbf{c}_0)$  kann in der Form

$$\mathbf{t}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma(s)) \\ \sin(\gamma(s)) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

mit einer noch zu bestimmenden **Winkelfunktion**  $\gamma(s)$  ( $s \in I$ ) angesetzt werden. Der Normalenvektor ist dann eindeutig durch

$$\mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\gamma(s)) \\ \cos(\gamma(s)) \end{pmatrix}$$

festgelegt. Aus der ersten FRENETschen Formel folgt der Zusammenhang  $\mathbf{t}'(s) = k(s) \mathbf{n}(s)$ . Andererseits ergibt sich aus dem Ansatz für  $\mathbf{t}(s)$

$$\mathbf{t}'(s) = \gamma'(s) \begin{pmatrix} -\sin(\gamma(s)) \\ \cos(\gamma(s)) \end{pmatrix} = \gamma'(s) \mathbf{n}(s) \quad (3.21)$$

und damit weiter  $\gamma'(s) = k(s)$ . Die Integration dieser Beziehung mit dem Anfangswert  $\gamma(s_0) = 0$  (folgt aus der Anfangsbedingung  $\mathbf{t}_0 = \mathbf{e}_1$ !) ergibt

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^s k(\sigma) d\sigma.$$

Nochmalige Integration von  $\mathbf{x}'(s) = \mathbf{t}(s)$  mit  $\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{0}$  liefert die Formel

$$\mathbf{x}(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} = \int_{s_0}^s \begin{pmatrix} \cos(\gamma(\tau)) \\ \sin(\gamma(\tau)) \end{pmatrix} d\tau. \quad (3.22)$$

Jede orientierungserhaltende EUKLIDische Bewegung im  $\mathbb{R}^2$  hat die Form

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

mit fest gewählten Werten  $\alpha \in [0, 2\pi)$  und  $(x_{01}, x_{02})^T \in \mathbb{R}^2$ .

Eine Parametrisierung jeder anderen ebenen  $C^2$ -Kurve  $(\mathbf{c})$  mit der gleichen Krümmungsfunktion  $k(s)$  wie die konstruierte Kurve  $(\mathbf{c}_0)$  geht aus (3.22) durch Anwendung einer geeigneten EUKLIDischen Bewegung (3.23) auf  $\mathbf{x}(s)$  hervor.

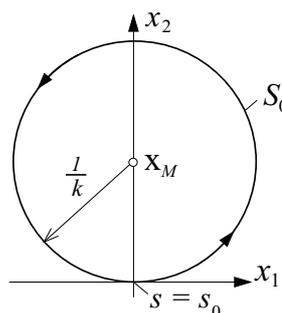
**Beispiel 3.10** Ebene Kurven mit konstanter Krümmung  $k(s) = k = \text{const.}$  sind entweder Geraden oder Kreise.

a) Ist  $k(s) = k = 0$ , so folgt  $\mathbf{x}''(s) = \mathbf{0}$  und nach zweimaliger Integration bezüglich  $s$ :  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{t}(s - s_0)$  ( $\mathbf{x}_0, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$  und  $\|\mathbf{t}\| = 1$ ).

b) Im Fall  $k(s) = k \neq 0$  folgt mit  $\gamma(s) = \int_{s_0}^s k d\sigma = k(s - s_0)$  die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(s) = \int_{s_0}^s \begin{pmatrix} \cos(k(\tau - s_0)) \\ \sin(k(\tau - s_0)) \end{pmatrix} d\tau = \frac{1}{k} \left[ \begin{pmatrix} \sin(k(s - s_0)) \\ -\cos(k(s - s_0)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

eines Kreises  $S_0$  mit dem Radius  $\frac{1}{k}$   
 und dem Mittelpunkt  $\mathbf{x}_M = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



Die Parameterdarstellung jedes anderen Kreises vom Radius  $\frac{1}{k}$  in der  $x_1 x_2$ -Ebene entsteht durch Anwendung einer EUKLIDische Bewegung der Form (3.23) auf  $\mathbf{x}(s)$ .

**Beispiel 3.11** Eine ebene Kurve, deren Krümmung  $k(s)$  proportional zu ihrer Bogenlänge  $s$  ist, heißt **Klothoide** (oder Spinnkurve). Mit dem Ansatz  $k(s) = \frac{1}{a^2} s$  ( $a = \text{const.}$ ,  $s \geq 0$ ) und  $s_0 = 0$  folgt  $\gamma(s) = \frac{1}{2a^2} s^2$  und weiter die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(s) = \int_0^s \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2a^2}\tau^2\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2a^2}\tau^2\right) \end{pmatrix} d\tau = \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} C(\alpha(s)) \\ S(\alpha(s)) \end{pmatrix} \quad (s \geq 0)$$

mit den beiden (nicht weiter elementar auswertbaren) FRESNEL-Integralen

$$C(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\cos(\beta)}{\sqrt{\beta}} d\beta; \quad S(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\sin(\beta)}{\sqrt{\beta}} d\beta.$$

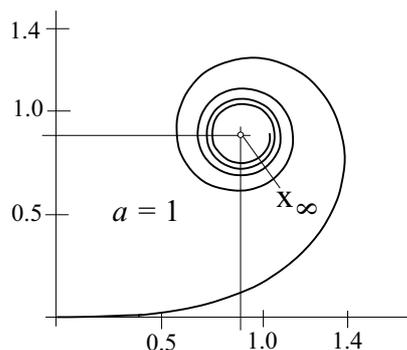
Diese Integrale entstehen mit den Substitutionen

$$s = a\sqrt{2\alpha}; \quad s = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \tau = a\sqrt{2\beta}; \quad d\tau = \frac{a}{\sqrt{2\beta}} d\beta.$$

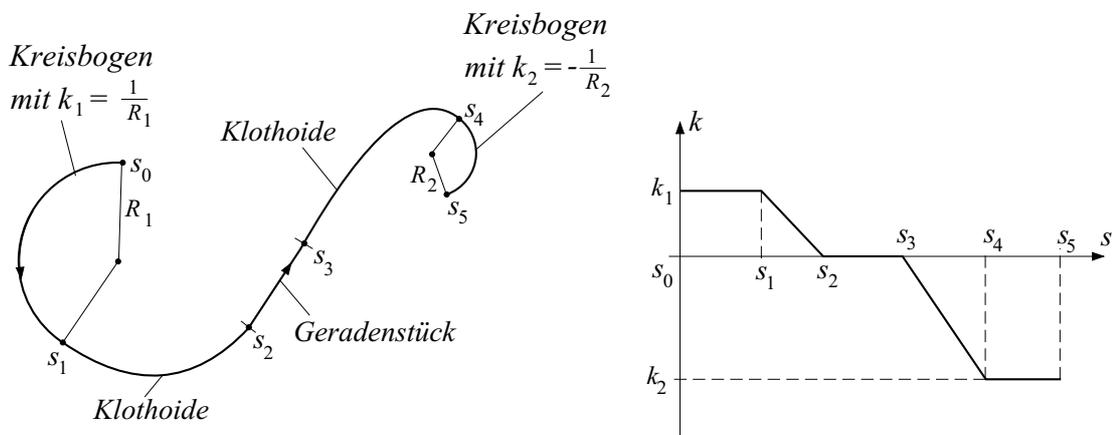
Der Kurvenanfang ( $s = 0$ ) befindet sich im Ursprung  $\mathbf{0}$ . Mit den Grenzwerten

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} C(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} S(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{x}(s) = \frac{a}{2} \sqrt{\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{x}_\infty$$

wird sichtbar, dass die Klothoide mit immer kleiner werdendem Krümmungsradius  $\frac{1}{k(s)}$  den Punkt  $\mathbf{x}_\infty$  umkreist (siehe Abb. 3.14).



Kurvenfragmente der Klothoide findet man im Zusammenhang mit Trassierungen im Verkehrswegebau. Hier geht es darum, einen stetigen Krümmungsverlauf längs einer die Verkehrsstrasse beschreibenden Kurve zu erreichen. Eine Straße oder Bahnlinie besteht im Wesentlichen aus Geradenstücken und Kreisbögen. Als Übergangsbögen zwischen diesen Kurvensegmenten verwendet man Klothoidenstücke, die die Krümmung des einen Segmentes mit jener eines nachfolgenden Segmentes stetig verbinden (siehe Abb. 3.15). Die auf ein Fahrzeug, welches sich entlang der Trasse bewegt, wirkenden Zentrifugalkräfte sind proportional zur Krümmung des Streckenverlaufes. Eine stetige Änderung der Krümmung führt damit auch zu einer stetigen Änderung der Zentrifugalkräfte, was sich zum einen verschleißmindernd auf die bewegten Fahrzeugteile auswirkt und zum anderen von den mitfahrenden Passagieren als ruhiges und gleichmäßiges Fahrverhalten registriert wird.



### 3.7. Evolute und Evolvente

Die ebene Kurve  $(c)$  sei nach der Bogenlänge gemäß  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisiert und habe die Krümmungsfunktion  $k(s)$ . Für jedes  $s$  mit  $k(s) \neq 0$  ist der  $(c)$  von zweiter Ordnung berührende Krümmungskreis mit dem Radius  $\rho(s) = 1/|k(s)|$  definiert. Die Mittelpunkte aller dieser in der  $x_1x_2$ -Ebene liegenden Krümmungskreise bilden die Spur  $c_M$  einer Kurve  $(c_M)$ , die man **Evolute** (oder Brennkurve) zur Kurve  $(c)$  nennt. Mit  $s$  als Parameter und dem Normalenvektor  $\mathbf{n}(s)$  der Kurve  $(c)$  erhält man folgende Parameterdarstellung der Evolute:

$$\mathbf{x}_M(s) = \mathbf{x}(s) + \frac{1}{k(s)} \mathbf{n}(s) \quad (3.24)$$

$(s \in I, k(s) \neq 0).$

Mit dieser Darstellung ist die Evolute nicht nach ihrer Bogenlänge parametrisiert!

**Bemerkung 3.9** Eine Kurve  $(\mathbf{c})$  mit stetig differenzierbarer streng monotoner nirgends verschwindender Krümmungsfunktion  $k(s)$ , d.h. mit  $k(s) \neq 0$  und  $k'(s) \neq 0$  für alle  $s \in I$ , besitzt eine für alle  $s \in I$  regulär parametrisierbare Evolute. Die Tangentenvektoren  $\mathbf{t}_M(s)$  der Evolute sind in jedem Kurvenpunkt parallel zum Normalenvektor  $\mathbf{n}(s)$  von  $(\mathbf{c})$  und es gilt:

$$\frac{d\mathbf{x}_M(s)}{ds} \equiv \dot{\mathbf{x}}_M(s) = -\frac{k'(s)}{(k(s))^2} \mathbf{n}(s) \quad s \in I.$$

**Beweis.** Mit der zweiten FRENETSchen Formel  $\mathbf{n}'(s) = -k(s) \mathbf{t}(s) = -k(s) \mathbf{x}'(s)$  erhält man:

$$\dot{\mathbf{x}}_M(s) = \mathbf{x}'(s) + \frac{1}{k(s)} \mathbf{n}'(s) - \frac{k'(s)}{(k(s))^2} \mathbf{n}(s) = -\frac{k'(s)}{(k(s))^2} \mathbf{n}(s).$$

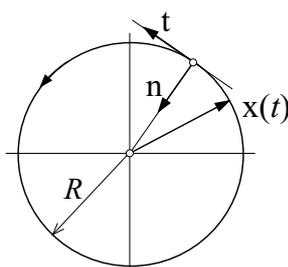
Da  $\mathbf{t}_M(s)$  parallel zu  $\dot{\mathbf{x}}_M(s)$  ist, folgt aus dieser Formel auch die Parallelität von  $\mathbf{t}_M(s)$  zu  $\mathbf{n}(s)$ . Wegen  $\|\dot{\mathbf{x}}_M(s)\| = \frac{|k'(s)|}{(k(s))^2} > 0$  ist  $(\mathbf{c}_M)$  für alle  $s \in I$  regulär parametrisierbar. ■

**Bemerkung 3.10** Ist die Kurve  $(\mathbf{c})$  nach dem freien Parameter  $t$  gemäß  $\mathbf{x}(t)$  ( $t \in I$ ) regulär parametrisiert, so ergibt sich mit Formel (3.18) für  $k(t)$  und

$$\mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \begin{pmatrix} -\dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{pmatrix}:$$

$$\mathbf{x}_M(t) = \mathbf{x}(t) + \frac{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2}{\dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t) - \dot{x}_2(t)\ddot{x}_1(t)} \begin{pmatrix} -\dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 3.12** Ein Kreis mit dem Radius  $R$  und der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$


besitzt die konstante Krümmung  $k = \frac{1}{R}$  und den Normalenvektor  $\mathbf{n}(t) = -\frac{1}{R} \mathbf{x}(t)$ . Die Evolute eines Kreises besteht folglich nur aus einem Punkt, dem Mittelpunkt des Kreises:  $\mathbf{x}_M(t) = \mathbf{x}(t) + R\mathbf{n}(t) = \mathbf{0}$ .

**Beispiel 3.13**  $(\mathbf{c})$  sei eine Parabel mit der Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mit  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$  und  $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  ergibt sich für  $(\mathbf{c})$  die Evolute

$$\mathbf{x}_M(t) = \begin{pmatrix} x_{M1}(t) \\ x_{M2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + \frac{1+4t^2}{2} \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t^3 \\ 0.5 + 3t^2 \end{pmatrix},$$

die für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert ist. Allerdings liegt wegen

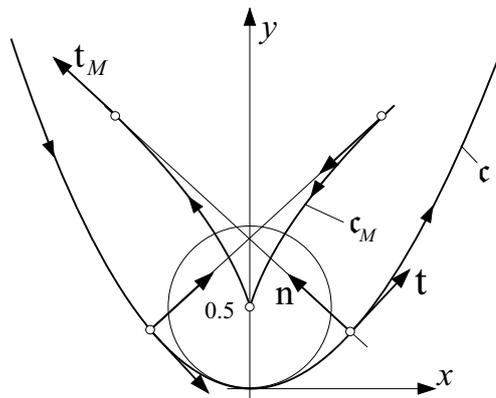
$$\dot{\mathbf{x}}_M(t) = \begin{pmatrix} -12t^2 \\ 6t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}}_M(0) = \mathbf{0}$$

für  $t = 0$  keine reguläre Parametrisierung vor ( $\dot{\mathbf{k}}(0) = \mathbf{0}$ ). Die Evolute besitzt für  $t = 0$  einen Knick und folglich ist auch der Normalenvektor im Punkt  $\mathbf{x}_M(0)$  nicht definiert (siehe Abb. 3.18).

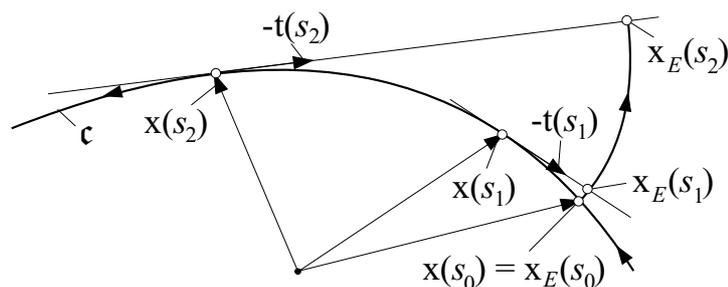
Aus  $x = x_{M1} = -4t^3$  folgt  $t^2 = \sqrt[3]{\frac{x^2}{16}}$  und weiter

$$y(x) = x_{M2} = 0.5 + 3t^2 = 0.5 + 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{16}}.$$

Die Evolute zu  $(\mathbf{c})$  kann deshalb in einem funktionellen Zusammenhang  $y = y(x)$  dargestellt werden und beschreibt eine als **NEILSche Parabel** (oder semikubische Parabel) bekannte Kurve (siehe Abb. 3.18).



Auf eine ebene Kurve  $(\mathbf{c})$ , die nach der Bogenlänge gemäß  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisiert ist, sei ein Faden straff anliegend aufgezogen. Wickelt man diesen Faden beginnend beim Parameterwert  $s_0$  stets tangential zur Kurve  $(\mathbf{c})$  haltend ab, so beschreibt der Fadenanfang ( $s = s_0$ ) die Spur einer Kurve  $(\mathbf{c}_E)$ , die **Evolute** (oder Fadenlinie) der Kurve  $(\mathbf{c})$  zum Parameterwert  $s_0$  genannt wird (siehe Abb. 3.19).



Eine Parameterdarstellung  $\mathbf{x}_E(s)$  ( $s \geq s_0$ ) der Evolvente ( $\mathbf{c}_E$ ) zu ( $\mathbf{c}$ ) zum Wert  $s_0$  erhält man nach der Vorschrift

$$\mathbf{x}_E(s) = \mathbf{x}(s) - (s - s_0) \mathbf{t}(s) \quad (s \geq s_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s)).$$

$s$  ist der Bogenlängenparameter zu ( $\mathbf{c}$ ), aber nicht von ( $\mathbf{c}_E$ ), folglich liegt mit  $\mathbf{x}_E(s)$  keine Parametrisierung der Evolvente nach der Bogenlänge vor.

**Satz 3.4** *Bildet man zu einer ebenen Kurve ( $\mathbf{c}$ ) mit  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I = (0, L)$ ) die Evolvente mit  $\mathbf{x}_E(s)$  ( $s \in I$ ) zum Wert  $s_0 = 0$  und zu dieser Evolvente die Evolute mit der Parametrisierung  $\mathbf{x}_M(s)$ , so gilt  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_M(s)$  ( $s \in I$ ). Eine ebene Kurve ist demzufolge gleich der Evolute ihrer Evolvente.*

**Beweis.** Mit  $s = 0$  erhält man die Evolvente von ( $\mathbf{c}$ ) in der Form

$$\mathbf{x}_E(s) = \mathbf{x}(s) - s \mathbf{t}(s).$$

Zur Beschreibung der Evolute von  $\mathbf{x}_E(s)$  werden die Ableitungen  $\dot{\mathbf{x}}_E(s)$  und  $\ddot{\mathbf{x}}_E(s)$  benötigt. Mit  $\mathbf{x}'(s) = \mathbf{t}(s)$  und den FRENETSchen Formeln (3.19) für die Kurve ( $\mathbf{c}$ ) folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_E(s) &= \mathbf{x}'(s) - \mathbf{t}(s) - s \mathbf{t}'(s) = -s k(s) \mathbf{n}(s) \\ \ddot{\mathbf{x}}_E(s) &= -k(s) \mathbf{n}(s) - s k'(s) \mathbf{n}(s) - s k(s) \mathbf{n}'(s) \\ &= -(k(s) + s k'(s)) \mathbf{n}(s) + s k^2(s) \mathbf{t}(s). \end{aligned}$$

Mit diesen Größen und Formel (3.18) erhält man weiter:

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{x}}_E(s)\| &= s |k(s)| \quad \text{und} \quad \det(\{\dot{\mathbf{x}}_E(s), \ddot{\mathbf{x}}_E(s)\}) = s^2 k^3(s) \\ k_E(s) &= \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}_E(s)\|^3} \det(\{\dot{\mathbf{x}}_E(s), \ddot{\mathbf{x}}_E(s)\}) = \frac{1}{s} \text{sign}(k(s)) \\ \mathbf{n}_E(s) &= \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}_E(s)\|} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_E(s) \\ &= -\frac{s k(s)}{s |k(s)|} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = \text{sign}(k(s)) \mathbf{t}(s) \end{aligned}$$

Werden diese Größen in der Parameterdarstellung (3.24) von  $\mathbf{x}_M(s)$  substituiert, so folgt

$$\mathbf{x}_M(s) = \mathbf{x}_E(s) + \frac{1}{k_E(s)} \mathbf{n}_E(s) = \mathbf{x}(s) - s \mathbf{t}(s) + s \mathbf{t}(s) = \mathbf{x}(s).$$

■

**Beispiel 3.14** Ein Kreis mit dem Radius  $R$  und dem Mittelpunkt im Ursprung  $\mathbf{0}$  hat mit der Bogenlänge  $s$  als Parameter die Darstellung

$$\mathbf{x}(s) = R \begin{pmatrix} \cos(s/R) \\ \sin(s/R) \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Mit  $s_0 = 0$  folgt die Evolvente

$$\mathbf{x}_E(s) = R \begin{pmatrix} \cos(s/R) \\ \sin(s/R) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \sin(s/R) \\ -\cos(s/R) \end{pmatrix} \quad (s \geq 0).$$

**Bemerkung 3.11** Evolventen treten im Zusammenhang mit Zahnradkonstruktionen auf. Bezieht man sich auf den kreisförmigen Querschnitt eines Zahnrades, so werden für die Konturlinien der Zahnflanken meist Evolventen des Zahnradgrundkreises verwendet. Damit wird erreicht, dass sich die Berührungspunkte von im Eingriff befindlichen Zähnen zweier Zahnräder auf einer gemeinsamen Tangente an die Grundkreise liegen. Die Kräfte zwischen den Zahnrädern werden dann stets auf mehrere gleichzeitig im Eingriff befindliche Zähne verteilt, was die Kraftübertragung begünstigt.

Evolventen findet man auch auf dem Oval eines Leichtathletikstadions. Mittel- und Langstreckenläufe werden gewöhnlich nicht in Bahnen gestartet, sondern die Läufer nehmen Aufstellung entlang einer Evolvente eingangs einer Kurve. Damit legen die am Außenrand der Bahn startenden Läufer die gleiche Wegstrecke zurück, wenn sie vom Startpunkt weg längs einer Geraden auf den Innenrand zulaufen.

## 3.8. Globale Theorie ebener Kurven

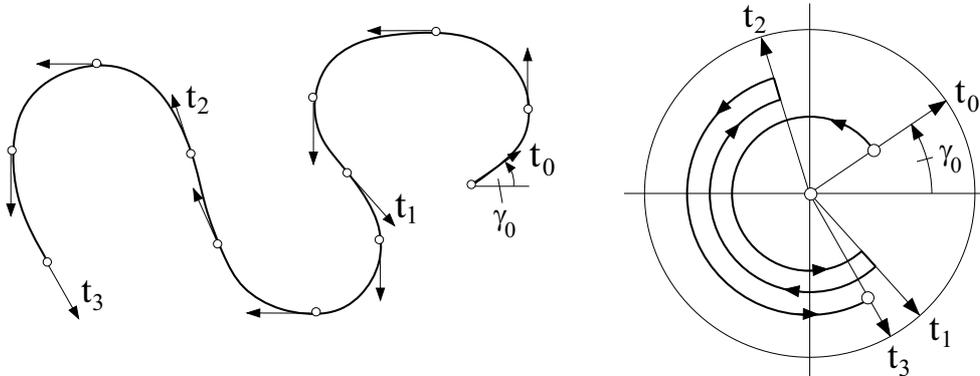
In diesem Abschnitt geht es um Eigenschaften periodischer (oder geschlossener) Kurven, insbesondere um deren Krümmungsverhalten. Dazu sei  $(\mathbf{c})$  eine ebene  $C^2$ -Kurve, die nach der Bogenlänge  $s$  gemäß  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisiert ist. Der Tangentenvektor  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s)$  an  $(\mathbf{c})$  ist in der Form

$$\mathbf{t}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma(s)) \\ \sin(\gamma(s)) \end{pmatrix}$$

mit der stetig differenzierbaren Winkelfunktion  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  darstellbar. Wegen der  $2\pi$ -Periodizität der  $\cos$ - und  $\sin$ -Funktion ist  $\gamma(s)$  jedoch nicht eindeutig bestimmt. Eine andere Funktion  $\bar{\gamma}(s)$ , die  $\mathbf{t}(s)$  in gleicher Weise beschreibt, kann sich aber von  $\gamma(s)$  nur um ein Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, so dass Differenzen  $\gamma(s_1) - \gamma(s_2)$  ( $s_1, s_2 \in I$ ) stets eindeutig festgelegt sind.

Zur grafischen Veranschaulichung des Zusammenhanges zwischen den Funktionswerten einer Winkelfunktion  $\gamma(s)$  und den Tangentenvektoren  $\mathbf{t}(s)$  verschiebt man die Fußpunkte aller  $\mathbf{t}(s)$  in den Koordinatenursprung und bildet die Spur, die aus den Endpunkten der  $\mathbf{t}(s)$  besteht, wenn der Parameter  $s$  das Intervall  $I$  durchläuft. Die sich

überschneidenden Abschnitte der Spur werden dabei in radialer Richtung etwas auseinander gezogen (siehe Abb. 3.20). Den entstehenden Linienzug um den Ursprung nennt man **Tangentenindikatrix** zur Kurve  $(\mathbf{c})$ .



**Bemerkung 3.12** Zwischen der Krümmung und der Winkelfunktion  $\gamma(s)$  besteht der Zusammenhang

$$\gamma'(s) = k(s), \quad (3.25)$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(s) &= \mathbf{t}'(s) = \gamma'(s) \begin{pmatrix} -\sin(\gamma(s)) \\ \cos(\gamma(s)) \end{pmatrix} = \gamma'(s) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\gamma(s)) \\ \sin(\gamma(s)) \end{pmatrix} \\ &= \gamma'(s) \mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

Vergleicht man diesen Zusammenhang mit der Definitionsgleichung für die Krümmung  $\mathbf{x}'' = k\mathbf{n}$ , so folgt (3.25).

**Definition 3.11** Die ebene  $C^r$ -Kurve  $(\mathbf{c})$  ( $r > 0$ ) mit der Parametrisierung  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) heißt **periodisch** (oder **geschlossen**), wenn ein  $S > 0$  existiert und gilt

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s + S) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Das kleinste  $S > 0$  mit dieser Eigenschaft wird **Periode** von  $(\mathbf{c})$  genannt.

Die ebene  $C^r$ -Kurve  $(\mathbf{c})$  heißt **einfach periodisch** (oder **einfach geschlossen**), wenn sie periodisch mit der Periode  $S$  ist und jede eingeschränkte Abbildung

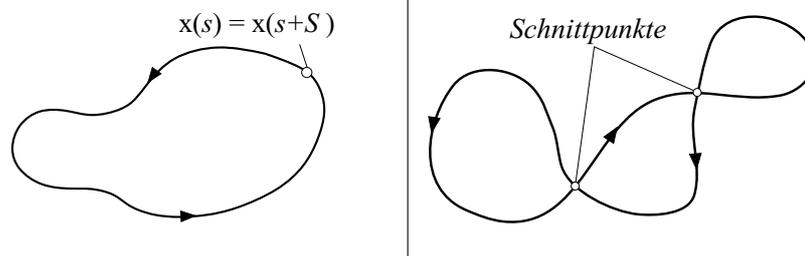
$$\bar{\mathbf{x}} : [s, s + S) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}(s)$$

injektiv ist.

**Bemerkung 3.13** Die Kurve  $(\mathbf{c})$  ist einfach geschlossen, wenn sie auf jedem Intervall  $[s, s + S)$  keine Schnittpunkte besitzt, oder gleichbedeutend dazu, wenn es keine Kurvenpunkte gibt, für die gilt

$$\mathbf{x}(s_1) = \mathbf{x}(s_2) \quad \text{mit} \quad s \leq s_1 < s_2 < s + S$$

*einfach geschlossene Kurve:* | *nicht einfach geschlossene Kurve:*



**Beispiel 3.15** Der Kreis  $\mathbf{x}(s) = (R \cos(s/R), R \sin(s/R))^T$  ( $s \in \mathbb{R}; R > 0$ ) ist einfach periodisch und besitzt die Periode  $S = 2\pi R$ .

**Definition 3.12** (c) sei eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene periodische  $C^2$ -Kurve mit der Periode  $S$  und der Krümmungsfunktion  $k(s)$ . Die Größe

$$T_c = \int_0^S k(\sigma) d\sigma$$

heißt **Totalkrümmung** von (c).

**Bemerkung 3.14** Da mit der Periodizität von (c) auch die Krümmung  $k(s)$  eine  $S$ -periodische Funktion ist, kann die Totalkrümmung auch über ein beliebiges Intervall  $[s, s + S]$  der Länge  $S$  berechnet werden, d.h., es gilt

$$T_c = \int_0^S k(\sigma) d\sigma = \int_s^{s+S} k(\sigma) d\sigma = \int_s^{s+S} \gamma'(\sigma) d\sigma.$$

Die Gleichheit zum ganz rechts stehenden Integral folgt wegen  $k(s) = \gamma'(s)$  (siehe Bemerkung 3.12).

**Definition 3.13** (c) sei eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene periodische  $C^2$ -Kurve mit der Periode  $S$  und dem Tangentenvektor  $\mathbf{t}(s) = (\cos(\gamma(s)), \sin(\gamma(s)))^T$ . Die Größe

$$U_c = \frac{1}{2\pi} (\gamma(S) - \gamma(0))$$

heißt **Umlaufzahl** der Kurve (c).

**Satz 3.5** Ist  $(c)$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte  $C^2$ -Kurve mit der Periode  $S$  und der Krümmung  $k(s)$ , so ergibt sich für die Umlaufzahl

$$U_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^S k(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi} T_c.$$

**Beweis.** Der Beweis folgt unmittelbar aus Bemerkung 3.12 und mit

$$U_c = \frac{1}{2\pi} (\gamma(S) - \gamma(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^S \gamma'(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^S k(\sigma) d\sigma.$$

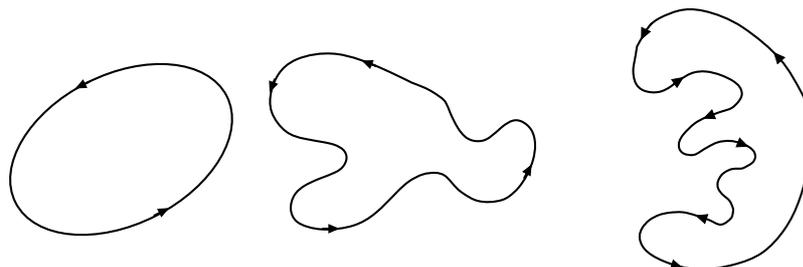
■

**Satz 3.6 ( Satz von HOPF )**

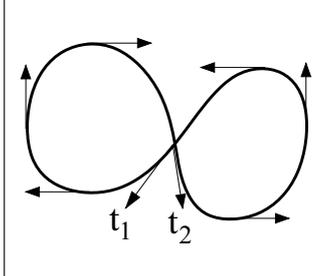
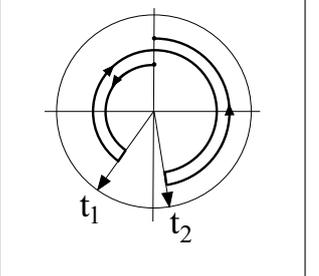
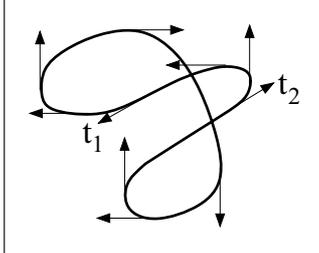
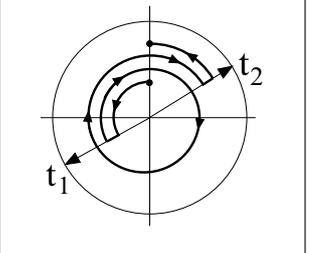
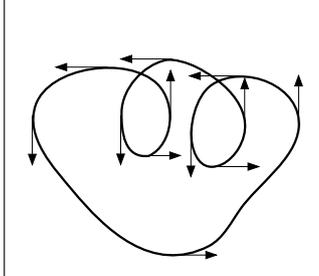
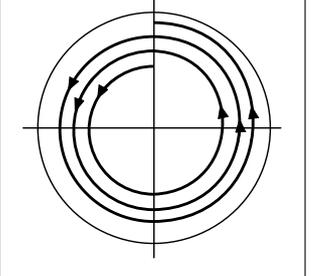
Für eine ebene einfach periodische  $C^2$ -Kurve  $(c)$  ist die Umlaufzahl  $U_c = \pm 1$  und die Totalkrümmung  $T_c = \pm 2\pi$ .

Einen Beweis dieses Satzes findet man z.B. in [Kühn] S. 28.

**Bemerkung 3.15** Die Totalkrümmung und damit auch die Umlaufzahl einer ebenen periodischen  $C^2$ -Kurve ist nicht nur gegenüber (orientierungserhaltenden) Drehungen und Translationen in der Ebene, sondern auch gegenüber regulären Deformationen invariant. Die in Abb. 23 dargestellten Kurven besitzen alle die gleiche Totalkrümmung und Umlaufzahl  $U_c = 1$ . Man sagt in diesem Falle, dass alle zur gleichen Homotopieklasse gehören.



**Beispiel 3.16** Beispiele zur Umlaufzahl periodischer Kurven

Kurve	Tangentenindikatrix	Umlaufzahl
		$U_c = 0$
		$U_c = -1$
		$U_c = 3$

**Bemerkung 3.16** Die ebene periodische  $C^2$ -Kurve  $(\mathbf{c})$  mit der Periode  $S$  sei nicht nach der Bogenlänge  $s$ , sondern nach dem freien Parameter  $t$  gemäß  $\mathbf{x}(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) parametrisiert, wobei der Zusammenhang  $s = s(t) = \varphi^{-1}(t)$  mit

$$s(t+T) = s(t) + S \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+T) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

besteht.  $T$  heißt Periode der Kurve  $(\mathbf{c})$  bezüglich der Parametrisierung  $\mathbf{x}(t)$ . Mit der Formel (3.18) für die Krümmung  $k(t)$  und dem Bogenelement  $ds = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt$  erhält man für die Totalkrümmung

$$T_c = \int_t^{t+T} k(\tau) \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\| d\tau.$$

**Beispiel 3.17** Die Kurve  $(\mathbf{c})$  sei nach dem freien Parameter  $t$  gemäß

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

parametrisiert. Dann ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) \\ 3 \cos(3t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -4 \sin(2t) \\ -9 \sin(3t) \end{pmatrix}.$$

Zum Nachweis der Regularität dieser Parametrisierung wird zunächst vom Gegenteil ausgegangen, d.h., dass ein  $t_0 \in \mathbb{R}$  mit  $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{0}$  existiert. In diesem Fall wäre  $\cos(2t_0) = \cos(3t_0) = 0$  und es müßte ganze Zahlen  $k$  und  $l$  mit

$$2t_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{und} \quad 3t_0 = \frac{\pi}{2} + l\pi$$

geben. Daraus leitet man sofort die Beziehung  $\frac{1}{4} + \frac{k}{2} = \frac{1}{6} + \frac{l}{3}$  und weiter  $4l - 6k = 1$  her. Die linke Seite dieses letzten Zusammenhanges ist aber stets geradzahlig, weshalb diese Beziehung für kein ganzzahliges Paar  $k, l$  erfüllt werden kann. Damit kann es kein  $t_0 \in \mathbb{R}$  mit  $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{0}$  geben, womit die Regularität der Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gesichert ist.

Zum Nachweis der Periodizität von  $(\mathbf{c})$  ist die Gültigkeit von

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} = \mathbf{x}(t+T) = \begin{pmatrix} \sin(2(t+T)) \\ \sin(3(t+T)) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

und für ein  $T > 0$  zu zeigen. Wegen der  $2\pi$ -Periodizität der  $\sin$ -Funktion müssen ganze Zahlen  $k, l$  existieren, so dass gilt

$$\begin{aligned} 2(t+T) &= 2t + 2k\pi \\ 3(t+T) &= 3t + 2l\pi \end{aligned} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

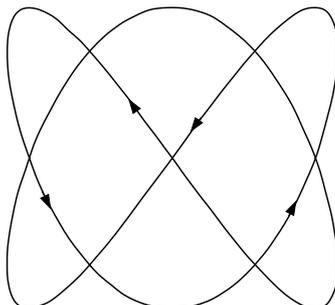
Daraus folgt  $T = 2(l-k)\pi$  und damit die Periodizität von  $(\mathbf{c})$ .  $T = 2\pi$  ist der kleinste positive Wert, der diese Beziehung erfüllt und deshalb die Periode von  $(\mathbf{c})$  in dieser Parameterdarstellung. Wegen  $\sin(k\pi) = 0$  ist  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\pi)$  und damit  $(\mathbf{c})$  nicht einfach periodisch. Mit

$$\begin{aligned} ds &= \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt = (4\cos^2(2t) + 9\cos^2(3t))^{1/2} dt \quad \text{und} \\ k(t) &= \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3} \det(\{\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)\}) = \frac{12\sin(2t)\cos(3t) - 18\cos(2t)\sin(3t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3} \end{aligned}$$

erhält man für die Totalkrümmung von  $(\mathbf{c})$

$$T_c = \int_t^{t+2\pi} \frac{12\sin(2\tau)\cos(3\tau) - 18\cos(2\tau)\sin(3\tau)}{4\cos^2(2\tau) + 9\cos^2(3\tau)} d\tau.$$

Der Integrand ist eine ungerade Funktion und folglich verschwindet dieses Integral über dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  (mit  $t = -\pi$ ). Für die Totalkrümmung und Umlaufzahl gilt deshalb  $T_c = 0$  und  $U_c = 0$ . Abb. 3.24 zeigt den Verlauf der Spur von  $(\mathbf{c})$ .



### 3.9. Aufgaben

- Die Kurve  $(\mathbf{c})$  sei nach dem freien Parameter  $t$  gemäß  $\mathbf{x}(t)$  ( $t \in I$ ) und nach dem Bogenmaß  $s$  gemäß  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in \bar{I}$ ) regulär parametrisiert.
  - Mit der hinreichend oft stetig differenzierbaren Parametertransformation  $t = \varphi(s)$  ( $\varphi: I \rightarrow \bar{I}$ ) sind die Zusammenhänge (3.3) – (3.5) zwischen den 1. und 2. Ableitungen von  $\mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{x}(s)$  zu bestätigen.
  - Für eine Ellipse mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = (a \cos(t), b \sin(t), c)^T \quad t \geq 0; \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \geq b > 0$$

sind die Bogenlänge  $s = s(t)$  ( $t \geq 0$ ), die Formeln für  $\mathbf{x}'(s)$  und  $\mathbf{x}''(s)$  sowie die Krümmung  $k(t)$  herzuleiten.

- Die Kurve  $(\mathbf{c})$  habe mit dem Parameter  $t \in \mathbb{R}$  die Darstellung

$$\mathbf{x}(t) = (ae^t \cos(t), ae^t \sin(t), be^t)^T \quad (a > 0, b \in \mathbb{R}).$$

- $(\mathbf{c})$  ist nach der Bogenlänge zu parametrisieren.
  - Es sind das begleitende Dreibein, die Krümmung und Torsion für  $(\mathbf{c})$  zu bestimmen.
- Die FRENET-Kurve  $(\mathbf{c})$  sei nach der Bogenlänge  $s$  gemäß  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ) parametrisiert und  $s_0$  ein beliebiger, aber fest gewählter Parameterwert. Anhand der TAYLORSchen Formel für  $\mathbf{x}(s)$  in der Umgebung von  $s_0$  mit dem Restglied

$$(s - s_0)^3 \delta(s - s_0) \quad \left( \lim_{s \rightarrow s_0} \delta(s - s_0) = \mathbf{0} \right)$$

sind im Rahmen dieser Approximation asymptotische Darstellungen für die Projektionen von  $\mathbf{x}(s)$  auf die Schmiegeebene, Normalebene und rektifizierende Ebene im Punkt  $\mathbf{x}(s_0)$  herzuleiten. Die Projektionskurven sind in diesem approximativen Sinne zu charakterisieren.

- Zur ebenen Kurve einer Ellipse mit der Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(t) = (a \cos(t), b \sin(t))^T \quad t \in \mathbb{R}; \quad (a \geq b > 0)$$

ist die Evolute  $\mathbf{x}_M(t)$  zu konstruieren.

- Von einer FRENET-Kurve  $(\mathbf{c})$  sei bekannt, dass ihre Krümmung  $k > 0$  und Windung  $w$  konstant sind. Es ist zu zeigen, dass  $(\mathbf{c})$  Teil einer Schraubenlinie ist.
- Ein dünnes flexibles Seil, welches an zwei Punkten im Raum befestigt ist und unter seiner Eigenlast durchhängt, kann mit einer ebenen Kurve in einem kartesischen  $xy$ -Koordinatensystem beschrieben werden. Aus den Grundgesetzen der Mechanik folgt, dass zwischen den Koordinaten der Kurvenpunkte ein funktionaler Zusammenhang  $y = y(x)$  besteht, der die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (a > 0)$$

erfüllt. Das  $xy$ -Koordinatensystem sei so gewählt, dass die Seilkurve den Punkt  $(0, a)$  enthält und in diesem Punkt die Tangente parallel zur  $x$ -Achse verläuft. Man gebe eine reguläre Parametrisierung dieser als Kettenlinie bezeichneten Kurve an.

7. Zu zeigen ist: Besitzt eine ebene Kurve  $(\mathbf{c})$  die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

mit der zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist die Evolute zu  $(\mathbf{c})$  mit dem Parameter  $t$  in der Form

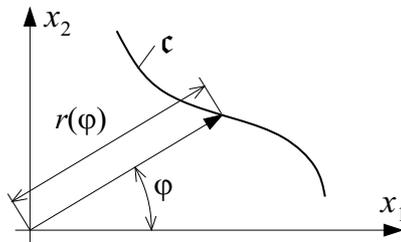
$$\mathbf{x}_M(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} + \frac{1 + (\dot{f}(t))^2}{\ddot{f}(t)} \begin{pmatrix} -\dot{f}(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellbar.

8. Unter bestimmten Bedingungen ist eine ebene Kurve  $(\mathbf{c})$  auch in der Form

$$\mathbf{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos(\varphi) \\ r(\varphi) \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \varphi \in I \subset \mathbb{R}$$

parametrisierbar. Dabei sind  $(r(\varphi), \varphi)$  die sogenannten Polarkoordinaten.



Mit dieser Parametrisierung sind für die Kurve  $(\mathbf{c})$  der Tangentenvektor  $\mathbf{t}(\varphi)$ , das Bogenelement  $ds(\varphi)$  und die Krümmung  $k(\varphi)$  zu berechnen.

9. Die folgenden ebenen Kurven sind mittels Polarkoordinaten  $(r(\varphi), \varphi)$  zu parametrisieren (siehe Aufgabe 8). Man berechne Länge  $L$  und Krümmung  $k$  dieser Kurven.

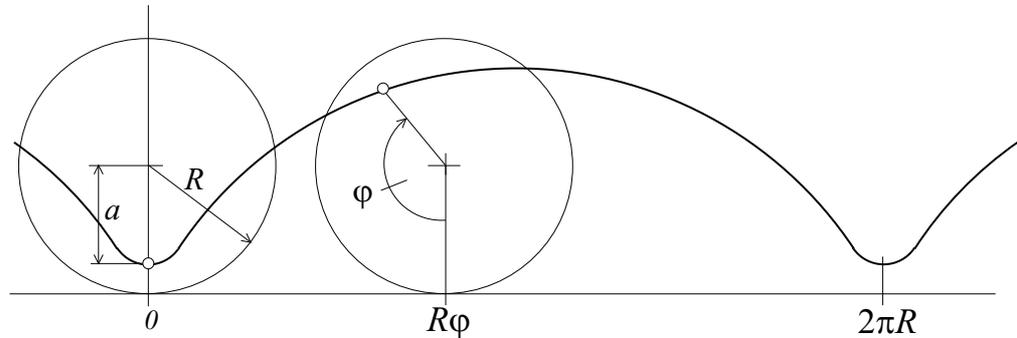
- a) (Logarithmische Spirale)

$$r(\varphi) = \exp\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) \quad -\infty < \varphi \leq a \quad (\alpha = \text{const} \neq 0).$$

- b) (Archimedische Spirale)

$$r(\varphi) = \alpha\varphi \quad 0 \leq \varphi \leq a \quad (\alpha = \text{const} \neq 0).$$

10. Rollt man einen Kreis mit dem Radius  $R$  auf einer Geraden ab, so durchläuft ein mit dem Kreis fest verbundener Punkt, der sich im Abstand  $a$  ( $0 < a \leq R$ ) vom Mittelpunkt des Kreises befindet, eine Kurve, die als Zykloide bezeichnet wird.



- a) Man gebe eine Parameterdarstellung der Zykloide an und weise die Kurvenpunkte mit regulärer Parametrisierung aus.
- b) In allen regulären Parameterpunkten ist die Krümmung der Zykloide zu berechnen.
- c) Es ist die Bogenlänge  $L$  der Zykloide mit  $a = R$  nach einem vollständigen Abrollen des Kreises zu berechnen.
11. Eine FRENET-Kurve  $(\mathbf{c})$  mit der Parametrisierung  $\mathbf{x}(s)$  ( $s \in I$ ,  $s$  Bogenlänge von  $(\mathbf{c})$ ) heißt Böschungslinie, wenn sie gegenüber einer Ebene mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}_E$  einen konstanten Anstieg besitzt. Genauer, wenn für den Tangentenvektor  $\mathbf{t}(s)$  gilt  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_E) = \text{const.}$  für alle  $s \in I$ .  
Es ist zu zeigen, dass  $(\mathbf{c})$  genau dann eine Böschungslinie ist, wenn Krümmung  $k(s)$  und Windung  $w(s)$  proportional zueinander sind, d.h., wenn eine Konstante  $c$  mit  $w(s) = ck(s)$  ( $s \in I$ ) existiert.



## 4. Flächen

Eine Fläche ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Gegenüber einer Kurve, auf der nur Bewegungen vor und zurück möglich sind, kann man sich auf einer Fläche in zwei voneinander unabhängige Richtungen bewegen, z.B. längs einer Kurve, die vollständig in die Fläche eingebettet ist (Flächenkurve). Neben Kurven lassen sich auf einer Fläche in vielfältiger Weise andere ein- und zweidimensionale geometrische Objekte (Dreiecke oder beliebige durch geschlossene Kurven berandete Flächenstücke) unterbringen. Es erscheint sinnvoll danach zu fragen, was man darunter versteht, sich auf einer Fläche geradeaus zu bewegen oder ob es zwischen zwei Punkten auf einer Fläche stets eine eindeutig bestimmte kürzeste Verbindung gibt. Ist die Fläche eine Ebene, so werden diese Fragen durch die Analytische Geometrie klar beantwortet. Bewegt man sich jedoch als Flachländer z.B. auf der Oberfläche einer Kugel, so ergeben sich zum Teil andere überraschende Antworten. Diese Überlegungen führen dazu, sich mit einer flächeneigenen Geometrie auseinander zu setzen. Man spricht von der inneren Geometrie einer Fläche und meint damit die Beschreibung der metrischen und topologischen Gegebenheiten der Fläche an sich unabhängig von ihrer Einbettung in den umgebenden Raum. Andererseits sieht ein Weltbeobachter eine Fläche als Teilmenge des dreidimensionalen Raumes. Er wird die Krümmung dieser Fläche z.B. über die Änderung der Flächennormale beurteilen, die der Flachländer in dieser Weise gar nicht wahr nimmt. Ebenso wird ein Flachländer nicht über die Lage seiner Fläche im Raum Bescheid wissen und nicht bemerken, wenn man sie einer starren Drehung oder Translation im Raum unterwirft. Diese Vorgänge werden der äußeren Geometrie zugeordnet.

Zur Beschreibung einer Fläche werden zwei unabhängige Parameter benötigt. Damit kann eine Fläche durch Abbildungen einer Punktmenge des  $\mathbb{R}^2$  in den  $\mathbb{R}^3$  analytisch erfasst werden. Flächen, die uns im Alltag begegnen, sind jedoch so vielfältig geformt, dass es sinnvoll ist, sich (wie im Fall der Kurven) auf hinreichend glatte Flächen zu beschränken. In diesem Sinne sollen Ecken, scharfe Kanten oder Spitzen von Flächen (z.B. Spitze eines Kegels oder Kanten und Ecken der Oberfläche eines Polyeders), in denen der Normalenvektor nicht eindeutig definiert ist, ausgeschlossen werden. Außerdem sollen diese Flächen zusammenhängend sein, d.h. nicht aus separaten voneinander getrennten Flächenstücken bestehen. Mathematisch klarer ausgedrückt, es werden Flächen betrachtet, die als Immersionen zusammenhängender Mengen des  $\mathbb{R}^2$  in den  $\mathbb{R}^3$  beschreibbar sind. Selbst unter diesen Bedingungen gelingt es in der praktischen Umsetzung nicht immer, jede glatte Fläche vollständig durch eine Immersion zu beschreiben. Nur für Teilbereiche wird es möglich sein, eine derartige Abbildung zu definieren. Deshalb überdeckt man eine Fläche so mit Umgebungen ihrer

Punkte, dass diese Mengen immersiv zu Parameterbereichen im  $\mathbb{R}^2$  in Beziehung stehen.

Im Hinblick auf das Studium lokaler Eigenschaften von Flächen, d.h. von Eigenschaften, die durch Funktionen der Flächenpunkte ausgedrückt werden können, ist diese Vorgehensweise ausreichend. Von diesen Gedankengängen wird in der folgenden Definition einer Fläche ausgegangen.

## 4.1. Definitionen und Parameterdarstellung

**Definition 4.1** Ein **regulär parametrisierbares Flächenstück** ist eine auf der offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  definierte Immersion

$$\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{gemäß} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in U \rightarrow \mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} X_1(u^1, u^2) \\ X_2(u^1, u^2) \\ X_3(u^1, u^2) \end{pmatrix}.$$

Wenn  $\mathbf{u}$  die Parametermenge  $U$  durchläuft, besteht der Wertebereich dieser Abbildung aus allen Ortsvektoren  $\mathbf{X}(u^1, u^2)$ . Die Menge aller dieser Ortsvektoren ist

$$\mathfrak{f} = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{X} = \mathbf{X}(u^1, u^2) ; (u^1, u^2)^T \in U \right\}$$

und heißt **Spur der Fläche**.

Die Koordinaten  $X_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind stetig differenzierbare Funktionen und für jedes  $\mathbf{u} \in U$  besitzt die JACOBI-Matrix

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u^1} & \frac{\partial X_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial u^1} & \frac{\partial X_2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial X_3}{\partial u^1} & \frac{\partial X_3}{\partial u^2} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

den Rang 2 ( $\text{rang}(\mathbf{J}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})) = 2$  für alle  $\mathbf{u} \in U$ ). Ist  $\mathbf{X}(u^1, u^2)$   $r$ -mal nach  $u^1$  und  $u^2$  stetig differenzierbar ( $r = 1, 2$  oder  $3$ ), so spricht man von einem **regulär parametrisierbaren  $C^r$ -Flächenstück** oder kürzer von einem  $C^r$ -Flächenstück.

**Definition 4.2** Die regulären Parametrisierungen  $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\bar{\mathbf{X}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eines  $C^r$ -Flächenstückes mit  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{X}(\Phi(\bar{\mathbf{u}}))$  heißen miteinander

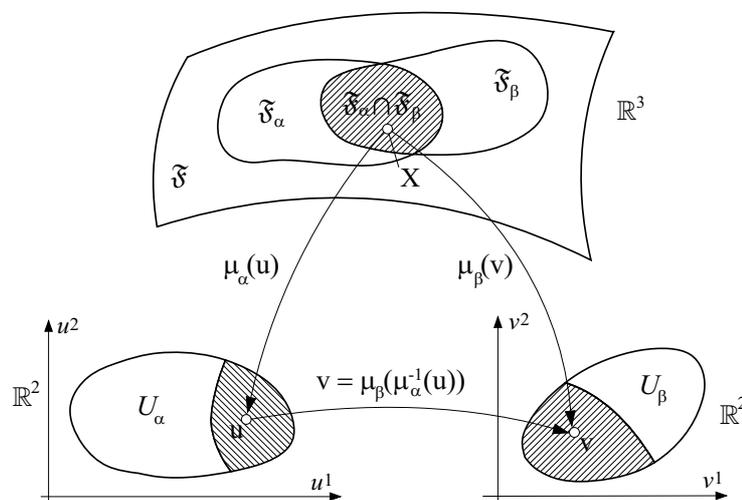
**verträgliche Parametrisierungen**, wenn die Transformation  $\Phi : \bar{U} \rightarrow U$  gemäß

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \bar{u}^1 \\ \bar{u}^2 \end{pmatrix} \in \bar{U} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \Phi(\bar{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \Phi^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \\ \Phi^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \end{pmatrix} = \mathbf{X}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}})) \in U$$

ein  $C^r$ -Diffeomorphismus von  $\bar{U}$  auf  $U$  ist, d.h. wenn für die Transformationsmatrix  $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}}$  gilt

$$\det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right) \neq 0 \quad \text{für alle } \bar{\mathbf{u}} \in \bar{U}, \text{ wobei } \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial \Phi^1}{\partial \bar{u}^2} \\ \frac{\partial \Phi^2}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial \bar{u}^2} \end{pmatrix}.$$

Ein Vergleich mit den Definitionen 3.1 und 3.2 zeigt, dass ein  $C^r$ -Flächenstück durch den Übergang zu zwei unabhängigen Parametern  $u^1$  und  $u^2$  als direkte Verallgemeinerung zur Einführung von  $C^r$ -Kurven anzusehen ist. Alle zueinander verträglichen Parametrisierungen einer Fläche werden, wie schon für Kurven praktiziert, zu einer Klasse  $(\mathbf{f})$  zusammengefasst, die im Weiteren **reguläres Flächenstück** heißen soll. Da die Immersionen  $U \rightarrow \mathbf{X}(U)$  im Allgemeinen nicht injektiv sind, ist die Abbildung  $(\mathbf{f}) \rightarrow \mathbf{f}$  zwischen den Klassen  $(\mathbf{f})$  und Spuren  $\mathbf{f}$  von Flächen nur surjektiv und man hat deshalb deutlich zwischen Klassen und Spuren zu unterscheiden. Für die Untersuchung lokaler Eigenschaften einer Fläche ist dies nicht von Bedeutung, denn dafür muss in Umgebungen eines Flächenpunktes lediglich eine konkrete reguläre Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  zur Verfügung stehen. Globale Flächeneigenschaften, die eine Fläche als einheitliches geometrisches Objekt beschreiben, erfordern die Einführung einer Fläche als zweidimensionale Mannigfaltigkeit.



**Definition 4.3** Eine Fläche ist eine Punktmenge  $\mathfrak{F}$  des  $\mathbb{R}^3$  zusammen mit folgenden Forderungen (siehe dazu Abb. 4.1):

1. Zu jedem  $\mathbf{X} \in \mathfrak{F}$  existiert eine Menge  $\mathfrak{F}_\alpha$  mit  $\mathbf{X} \in \mathfrak{F}_\alpha$ , so dass gilt

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathfrak{F}_\alpha \quad (\mathcal{I} \text{ Indexmenge}).$$

2. Zu jeder Menge  $\mathfrak{F}_\alpha$  gibt es eine injektive Abbildung  $\mu_\alpha : \mathfrak{F}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wobei  $\mu_\alpha(\mathfrak{F}_\alpha) = U_\alpha$  eine offene Menge im  $\mathbb{R}^2$  ist.

3. Im Falle  $\mathfrak{F}_\alpha \cap \mathfrak{F}_\beta \neq \emptyset$  und mit den Abbildungen  $\mu_\alpha(\mathfrak{F}_\alpha) = U_\alpha$ ,  $\mu_\beta(\mathfrak{F}_\beta) = U_\beta$  ist die Menge  $\mu_\alpha(\mathfrak{F}_\alpha \cap \mathfrak{F}_\beta)$  offen im  $\mathbb{R}^2$  und die zusammengesetzte Abbildung

$$\mu_\beta(\mu_\alpha^{-1}) : \mu_\alpha(\mathfrak{F}_\alpha \cap \mathfrak{F}_\beta) \rightarrow \mu_\beta(\mathfrak{F}_\alpha \cap \mathfrak{F}_\beta)$$

bildet einen  $C^r$ -Diffeomorphismus.

Die Abbildungen  $\mu_\alpha$  heißen Karten und die Transformationen  $\mu_\beta(\mu_\alpha^{-1})$  Kartenwechsel oder Koordinatentransformationen.

**Bemerkung 4.1** Jede Abbildung  $\mathbf{X}_\alpha \equiv \mu_\alpha^{-1} : U_\alpha \rightarrow \mathfrak{F}_\alpha$  ist eine reguläre Parametrisierung eines Flächenstückes mit der Spur  $\mathfrak{F}_\alpha$ . Aus der Forderung 2. folgt, dass diese Parametrisierungen nun injektive Immersionen sind. Je nachdem ob eine Fläche lokal oder global zu analysieren ist, wird im Folgenden auf die Definition einer Fläche als Klasse ( $\mathbf{f}$ ) regulärer verträglicher Parametrisierungen oder als Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{F}$  zurückgegriffen.

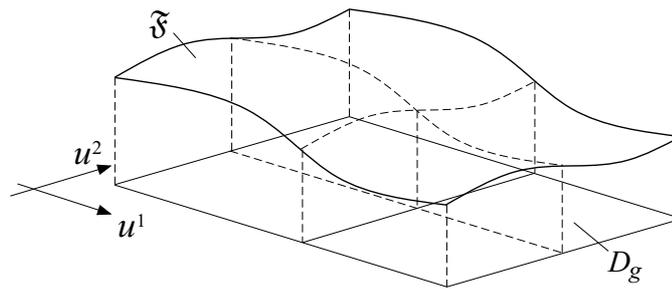
**Beispiel 4.1** Die Punktmenge einer Ebene  $\mathfrak{E}$  im  $\mathbb{R}^3$  ist durch eine Abbildung

$$\mathbf{X} : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{gemäß} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{u}) = \mathbf{X}_0 + u^1 \mathbf{a} + u^2 \mathbf{b}$$

regulär parametrisierbar, wenn die Richtungsvektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  im  $\mathbb{R}^3$  linear unabhängig sind. In diesem Fall hat die JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_\mathbf{X}$ , deren Spalten die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind, den Rang 2.  $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^3$  bezeichnet den Stützvektor der Ebene. Interpretiert man  $\mathfrak{E}$  als Mannigfaltigkeit, so kann diese durch eine Karte  $\mu = \mathbf{X}^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  beschrieben werden. Man spricht in diesem Fall von einer globalen Karte.

**Beispiel 4.2** Die Punktmenge  $\mathfrak{F}$  des Grafen einer über der offenen Menge  $U = D_g \subseteq \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbaren Funktion  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  bildet eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$ . Diese Fläche ist durch die Abbildung (siehe dazu Abb. 4.2):

$$\mathbf{X} : D_g \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{gemäß} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in D_g \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ g(u^1, u^2) \end{pmatrix}$$



regulär parametrisierbar. Die JACOBI-Matrix

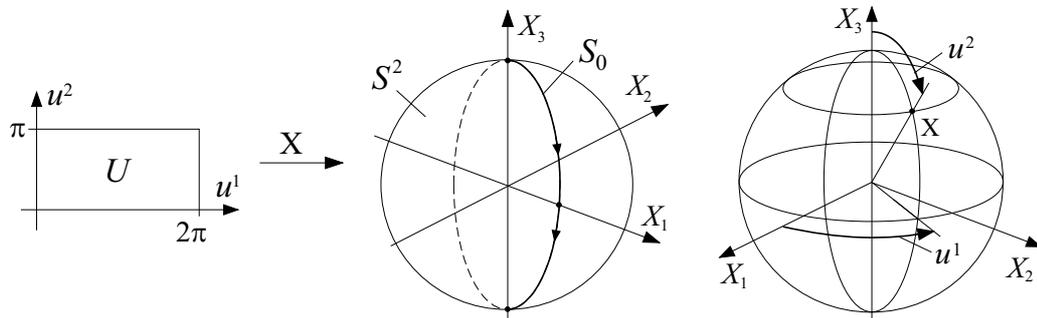
$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g_{,1} & g_{,2} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad g_{,i} = \frac{\partial g(u^1, u^2)}{\partial u^i}$$

hat für alle  $\mathbf{u} \in D_g$  den Rang 2. Wird  $\mathfrak{F}$  als Mannigfaltigkeit betrachtet, so ist diese mit  $\mu = \mathbf{X}^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow D_g$  durch eine globale Karte beschreibbar.

**Beispiel 4.3** Die **Einheitssphäre** im  $\mathbb{R}^3$  wird durch die Punktmenge

$$S^2 = \left\{ \mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1 \right\}$$

definiert.



$S^2$  kann jedoch nicht durch ein regulär parametrisiertes Flächenstück beschrieben werden. Entfernt man aus  $S^2$  die Punkte des Halbkreises

$$S_0 = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid X_1^2 + X_3^2 = 1 \text{ und } X_1 \geq 0, X_2 = 0 \right\},$$

so ist die verbleibende Punktmenge  $S_0^2 = S^2 - S_0$  mit der Abbildung (siehe Abb. 4.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &: U \rightarrow S_0^2 \quad \text{und} \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 0 < u^1 < 2\pi \\ 0 < u^2 < \pi \end{array} \right\} \quad \text{gemäß} \\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} &\rightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos(u^1) \sin(u^2) \\ \sin(u^1) \sin(u^2) \\ \cos(u^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

regulär parametrisierbar. Die Spaltenvektoren der JACOBI-Matrix

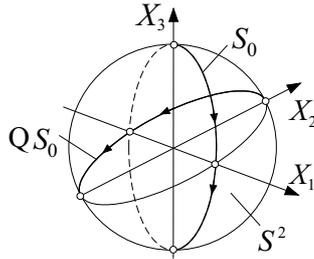
$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\sin(u^1) \sin(u^2) & \cos(u^1) \cos(u^2) \\ \cos(u^1) \sin(u^2) & \sin(u^1) \cos(u^2) \\ 0 & -\sin(u^2) \end{pmatrix}$$

sind für alle  $\mathbf{u} \in U$  orthogonal zueinander und  $\neq \mathbf{0}$ . Folglich ist  $\text{rang}(\mathbf{J}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})) = 2$  für alle  $\mathbf{u} \in U$ .

Die sich aus  $\mathbf{X}$  durch eine EUKLIDISCHE Bewegung ergebende Abbildung

$$\bar{\mathbf{X}} : \bar{U} = U \rightarrow \bar{S}_0^2 = S^2 - \mathbf{Q}S_0 \quad \text{gemäß}$$

$$\bar{\mathbf{u}} \in \bar{U} \rightarrow \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{Q}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\cos(\bar{u}^1) \sin(\bar{u}^2) \\ \cos(\bar{u}^2) \\ \sin(\bar{u}^1) \sin(\bar{u}^2) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



ist eine reguläre Parametrisierung des Flächenstückes  $\bar{S}_0^2$ . Die Flächenstücke  $S_0^2$  und  $\bar{S}_0^2$  überdecken ganz  $S^2$ . Die gesamte Sphäre ist deshalb mit zwei regulär parametrisierbaren Flächenstücken beschreibbar (siehe Abb. 4.4).

Aus Sicht einer Mannigfaltigkeit kann die Einheitssphäre als Vereinigung  $S^2 = S_0^2 \cup \bar{S}_0^2$  der Umgebungen  $S_0^2$  und  $\bar{S}_0^2$  mit den Karten  $\mu = \mathbf{X}^{-1} : S_0^2 \rightarrow U$  und  $\bar{\mu} = \bar{\mathbf{X}}^{-1} : \bar{S}_0^2 \rightarrow \bar{U}$  angesehen werden.

## 4.2. Tangentialraum und Einheitsnormalenfeld

Eine hinreichend kleine Umgebung eines Punktes  $\mathbf{X}_0$  eines regulär parametrisierbaren Flächenstückes kann näherungsweise durch eine Ebene, die Tangentialebene, in diesem Punkt dargestellt werden. Da jede Ebene als eine um den Stützvektor  $\mathbf{X}_0$  verschobener zweidimensionaler Unterraum des  $\mathbb{R}^3$  anzusehen ist, kann mit jedem Flächenpunkt auch ein Vektorraum, der Tangentialraum, zu diesem Punkt verbunden werden.

**Definition 4.4 (f)** sei ein reguläres Flächenstück mit der Parametrisierung  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} = (u^1, u^2)^T \in U$ ) und  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{u}_0)$  ein fester Flächenpunkt. Die Vektoren

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{u}_0) = \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u}_0)}{\partial u^1} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_2(\mathbf{u}_0) = \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u}_0)}{\partial u^2}$$

heißen **Tangentenbasisvektoren** im Punkt  $\mathbf{X}_0$  des Flächenstückes (f) bezüglich der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$ . Sind die Vektoren  $\mathbf{T}_1(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{T}_2(\mathbf{u})$  in jedem Flächenpunkt  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  orthogonal zueinander ( $(\mathbf{T}_1(\mathbf{u}), \mathbf{T}_2(\mathbf{u})) = 0$  für alle  $\mathbf{u} \in U$ ), so spricht man von

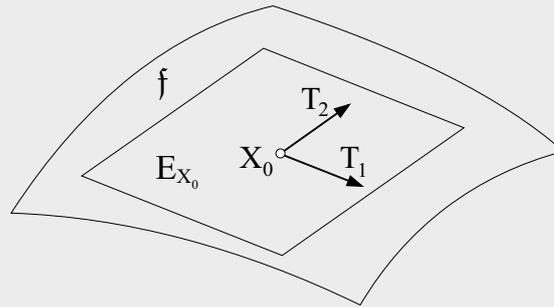
einer **GAUßschen Parametrisierung** des Flächenstückes ( $\mathbf{f}$ ).

Den von  $\mathbf{T}_1(\mathbf{u}_0)$  und  $\mathbf{T}_2(\mathbf{u}_0)$  aufgespannten Unterraum

$$\mathbf{T}_{\mathbf{X}_0} = \{ \mathbf{U} \in \mathbf{V}^3 \mid \mathbf{U} = U^1 \mathbf{T}_1(\mathbf{u}_0) + U^2 \mathbf{T}_2(\mathbf{u}_0); \quad U^1, U^2 \in \mathbb{R} \}$$

nennt man **Tangentialraum** im Punkt  $\mathbf{X}_0$  des Flächenstückes ( $\mathbf{f}$ ).

Der um den Stützvektor  $\mathbf{X}_0$  parallel verschobene Tangentialraum wird **Tangentialebene**  $\mathbf{E}_{\mathbf{X}_0} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{T}_{\mathbf{X}_0}$  im Punkt  $\mathbf{X}_0$  an das Flächenstück ( $\mathbf{f}$ ) genannt.



**Bemerkung 4.2** Es ist ersichtlich, dass die Spaltenvektoren der JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$  (siehe (4.1)) die Tangentenbasisvektoren  $\mathbf{T}_1(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{T}_2(\mathbf{u})$  im Punkt  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  sind. Geht man zu einer anderen zu  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  verträglichen Flächenparametrisierung  $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}})$  ( $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{U}$ ) mit der Transformation  $\mathbf{u} = \Phi(\bar{\mathbf{u}})$  (siehe Definition 4.2) über, so besteht zwischen den entsprechenden JACOBI-Matrizen  $\mathbf{J}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$  und  $\bar{\mathbf{J}}_{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}})$  der Zusammenhang

$$\bar{\mathbf{J}}_{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{J}_{\mathbf{X}}(\Phi(\bar{\mathbf{u}})) \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{u}}). \quad (4.3)$$

Damit ergeben sich für die Tangentenbasisvektoren beider Parametrisierungen die Beziehungen

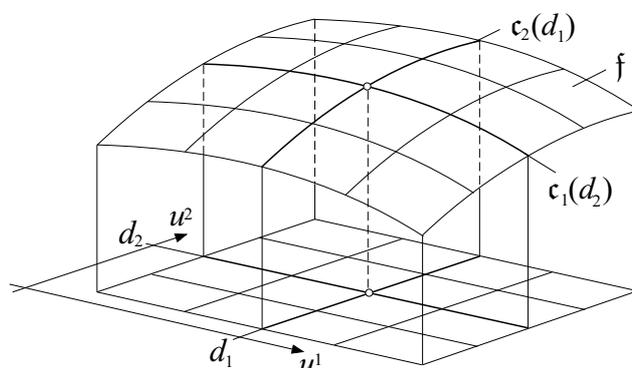
$$\bar{\mathbf{T}}_i(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}})}{\partial \bar{u}^i} = \mathbf{T}_1(\Phi(\bar{\mathbf{u}})) \frac{\partial \Phi^1}{\partial \bar{u}^i}(\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{T}_2(\Phi(\bar{\mathbf{u}})) \frac{\partial \Phi^2}{\partial \bar{u}^i}(\bar{\mathbf{u}}) \quad (i = 1, 2).$$

Die Basisvektoren  $\bar{\mathbf{T}}_1(\bar{\mathbf{u}})$  und  $\bar{\mathbf{T}}_2(\bar{\mathbf{u}})$  der Parametrisierung  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}})$  sind folglich Linearkombinationen der Basisvektoren  $\mathbf{T}_1(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{T}_2(\mathbf{u})$  der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$ , weshalb beide Vektorpaare den gleichen Tangentialraum aufspannen. Der Tangentialraum und damit auch die Tangentialebene zu einem festen Flächenpunkt sind deshalb unabhängig von der konkreten Flächenparametrisierung.

**Bemerkung 4.3** Abhängig von der Parametrisierung  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$  eines Flächenstückes ( $\mathbf{f}$ ) können in der Spur  $\mathfrak{f}$  zu ( $\mathbf{f}$ ) folgende Kurvenspuren eingeführt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1(d_2) &= \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{f} \mid \mathbf{x} = \mathbf{X}(u^1, d_2 = \text{const.}) \quad \text{mit} \quad (u^1, d_2) \in U \} \\ \mathbf{c}_2(d_1) &= \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{f} \mid \mathbf{x} = \mathbf{X}(d_1 = \text{const.}, u^2) \quad \text{mit} \quad (d_1, u^2) \in U \}. \end{aligned}$$

Diese Spuren heißen **Koordinatenlinien** der Parametrisierung  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$  auf  $\mathfrak{f}$ .



Indem die Parameter  $d_1$  und  $d_2$  im zulässigen Parameterbereich  $U$  variieren, ergeben sich zwei Scharen von Koordinatenlinien der Parametrisierung.

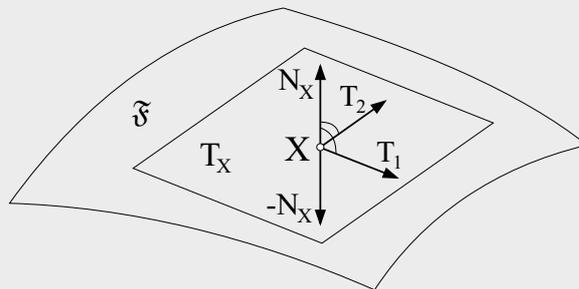
Die beiden Basisvektoren  $\mathbf{T}_1$  und  $\mathbf{T}_2$  des Tangentialraumes eines Flächenpunktes  $\mathbf{X}_0$  können durch einen weiteren Vektor  $\mathbf{N}$  zu einer Basis im  $\mathbb{R}^3$  ergänzt werden. Fordert man, dass  $\mathbf{N}$  in der EUKLIDischen Metrik des  $\mathbb{R}^3$  die Länge Eins besitzt, orthogonal zu  $\mathbf{T}_1$  und  $\mathbf{T}_2$  ist und  $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}\}$  ein Rechtssystem bildet, so ist  $\mathbf{N}$  eindeutig bestimmt und wird Normalenvektor der Fläche im Punkt  $\mathbf{X}_0$  genannt. Ein derartiger Normalenvektor existiert in jedem Punkt eines regulär parametrisierbaren Flächenstückes, so dass eine Abbildung zwischen den Flächenpunkten und den diesen zugeordneten Normalenvektoren besteht. Zur Beschreibung dieses Zusammenhanges ist es zweckmäßig, von der Definition 4.3 einer Fläche  $\mathfrak{F}$  als Mannigfaltigkeit auszugehen. Damit ist gesichert, dass zu jedem Flächenpunkt  $\mathbf{X}$  in einer Umgebung  $\mathfrak{F}_0$  mit  $\mathbf{X} \in \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$  eine Karte  $\mu : \mathfrak{F}_0 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$  existiert und  $\mathbf{X}(\mathbf{u}) = \mu^{-1}(\mathbf{u}) : U \rightarrow \mathfrak{F}_0$  eine (injektive) Parametrisierung des Flächenstückes  $\mathfrak{F}_0$  ist. Zu allen Flächenpunkten  $\mathbf{X}$  sind damit Parametrisierungen  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$ , Tangentenbasisvektoren  $\mathbf{T}_1(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{T}_2(\mathbf{u})$  und die  $\mathbf{X}$  zugeordneten Tangentialräume  $\mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  angebar. Vor diesem Hintergrund sind die nachfolgenden Ausführungen dieses Abschnittes zu sehen.

**Definition 4.5** Eine Abbildung

$$\mathbf{N} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{gemäß} \quad \mathbf{X} \in \mathfrak{F} \rightarrow \mathbf{N}_{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^3, \quad \text{wobei}$$

- a)  $\|\mathbf{N}_{\mathbf{X}}\| = 1$  und
- b)  $(\mathbf{N}_{\mathbf{X}}, \mathbf{U}) = 0$  für alle  $\mathbf{U} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  (D.h.  $\mathbf{N}_{\mathbf{X}}$  ist für jeden Punkt  $\mathbf{X}$  zu allen Vektoren  $\mathbf{U} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  orthogonal.)

heißt **Einheitsnormalenfeld** auf der Fläche  $\mathfrak{F}$  (siehe Abb. 4.7).



**Bemerkung 4.4** Aus der Unabhängigkeit der Tangentialräume von einer Flächenparametrisierung ergibt sich, dass auch ein Einheitsnormalenfeld unabhängig von der speziellen Wahl der Karten ist, die  $\mathfrak{F}$  beschreiben.

**Bemerkung 4.5** Mit einem Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{N}$  kann in jedem Flächenpunkt  $\mathbf{X}_0$  die Tangentialebene durch die Menge aller Ortsvektoren  $\mathbf{X}$  beschrieben werden, die folgende Gleichung erfüllen (siehe (2.5)):

$$(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0, \mathbf{N}_{\mathbf{X}_0}) = 0.$$

**Bemerkung 4.6** Ein Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{N}$  ist jedoch nicht eindeutig bestimmt, denn mit jeder derartigen Abbildung ist auch  $-\mathbf{N}$  ein Einheitsnormalenfeld. Man könnte auch von Punkt zu Punkt den Richtungssinn von  $\mathbf{N}$  ändern, d.h., sich einmal für  $\mathbf{N}_{\mathbf{X}}$  und zum anderen für  $-\mathbf{N}_{\mathbf{X}}$  entscheiden. Ein derartiges Einheitsnormalenfeld wäre wegen  $\|\mathbf{N}_{\mathbf{X}}\| = 1$  zwangsläufig unstetig. Existiert jedoch auf  $\mathfrak{F}$  ein stetiges Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{N}$ , so kann es mit  $-\mathbf{N}$  nur noch ein weiteres ebenfalls stetiges Einheitsnormalenfeld geben. Entscheidet man sich unter der Bedingung der Stetigkeit für das eine oder das andere und legt damit das Einheitsnormalenfeld eindeutig fest, gibt man der Fläche gleichzeitig eine Orientierung. Es zeigt sich aber, dass nicht auf jeder Fläche ein stetiges Einheitsnormalenfeld existiert und damit nicht jede Fläche orientierbar ist (siehe Beispiel 4.6). Orientierbarkeit einer Fläche bedeutet im anschaulichen Sinne die Möglichkeit, sich für eine von zwei ihrer Seiten zu entscheiden.

**Definition 4.6** Eine Fläche  $\mathfrak{F}$  (im Sinne der Definition 4.3) heißt orientierbar, wenn auf  $\mathfrak{F}$  ein stetiges Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{N}$  existiert.

Ist die Fläche  $\mathfrak{F}$  orientierbar, so ist durch die Wahl eines stetigen Einheitsnormalenfeldes eine Orientierung von  $\mathfrak{F}$  gegeben und  $\mathfrak{F}$  heißt dann **orientierte Fläche**.

Ein  $C^2$ -Flächenstück  $\mathfrak{F}_0$ , welches mit einer Karte gemäß  $\mu : \mathfrak{F}_0 \rightarrow U$  bzw. der injektiven Parametrisierung  $\mathbf{X} = \mu^{-1}$  beschreibbar ist, kann stets orientiert werden.

In diesem Fall sind die Tangentenbasisvektoren  $\mathbf{T}_i(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial u^i}$  ( $i = 1, 2$ ) auf  $U$  stetige Vektorfunktionen. Ein Einheitsnormalenfeld auf  $\mathfrak{F}_0$  ist durch Bildung des Vektorproduktes der Tangentenbasisvektoren mit anschließender Normierung berechenbar:

$$\mathbf{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{N}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{T}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{T}_2(\mathbf{u})}{\|\mathbf{T}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{T}_2(\mathbf{u})\|} \quad \mathbf{u} \in U. \quad (4.4)$$

Liegt eine Flächenparametrisierung vor, so wird im Weiteren das Einheitsnormalenfeld mit  $\mathbf{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$  oder  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  bezeichnet. Mit der Zuweisung (4.4) ist eine Abbildung verbunden, die jedem Parameterpaar  $\mathbf{u} = (u^1, u^2) \in U$  einen Vektor  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  der Einheitssphäre  $S^2 = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{X}\| = 1\}$  zuweist. Gemäß dieser Abbildung wird der an jedem Flächenpunkt  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  angeheftete Normalenvektor  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  parallel in den Ursprung des  $\mathbb{R}^3$  verschoben.

**Definition 4.7** *Es sei  $(\mathbf{f})$  ein  $C^3$ -Flächenstück mit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ) und dem Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ . Die Abbildung*

$$\hat{\mathbf{X}} : U \rightarrow S^2 \quad \text{gemäß} \quad \mathbf{u} \in U \rightarrow \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \mathbf{N}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{X}_{,1}(\mathbf{u}) \times \mathbf{X}_{,2}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{X}_{,1}(\mathbf{u}) \times \mathbf{X}_{,2}(\mathbf{u})\|} \in S^2 \quad (4.5)$$

heißt **GAUß-Abbildung** (oder *Normalabbildung*) von  $(\mathbf{f})$  in der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$ .

Eine Fläche ist damit gemäß Definition 4.6 genau dann orientierbar, wenn es eine reguläre Parametrisierung gibt, in der die GAUß-Abbildung stetig ist.

Ein Tripel, bestehend aus den Tangentenbasisvektoren  $\mathbf{T}_1(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{T}_2(\mathbf{u})$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ , heißt **begleitendes Dreibein** im Flächenpunkt  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  der Flächenparametrisierung. Aus der Injektivität der Parametrisierung und der Stetigkeit der Tangentenbasisvektoren folgt die Stetigkeit von  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  auf  $\mathfrak{F}_0$ . Wird  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  gemäß (4.4) gebildet, so stellt die geordnete Vektorfolge  $\{\mathbf{T}_1(\mathbf{u}), \mathbf{T}_2(\mathbf{u}), \mathbf{N}(\mathbf{u})\}$  des begleitenden Dreibeins für jedes  $\mathbf{u} \in U$  ein Rechtssystem dar. Man spricht deshalb im Zusammenhang mit dieser Wahl eines Einheitsnormalenfeldes von einer positiv orientierten Fläche  $\mathfrak{F}_0$ . Bei einer Entscheidung für  $-\mathbf{N}(\mathbf{u})$  ist  $\mathfrak{F}_0$  negativ orientiert.

**Bemerkung 4.7** *Geht man zu einer anderen Flächenparametrisierung  $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}})$  mit der Transformationsmatrix  $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}}$  über, so spannen die daraus folgenden Tangentenbasisvektoren  $\bar{\mathbf{T}}_1, \bar{\mathbf{T}}_2$  die gleiche Tangentialebene auf wie die Vektoren  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$  der Parametrisierung  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$ . Ist  $\det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right) > 0$ , so haben beide Basissysteme die gleiche*

Orientierung und folglich ist  $\mathbf{N}_{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$ . Im Falle  $\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\mathbf{u}}}\right) < 0$  kommt es jedoch zu einem Wechsel in der Orientierung der Basis  $\bar{\mathbf{T}}_1, \bar{\mathbf{T}}_2$ , woraus ein Vorzeichenwechsel des Normalenvektors resultiert:  $\mathbf{N}_{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}}) = -\mathbf{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$ .

Eine Fläche  $\mathfrak{F}$ , die mit einer globalen Karte vollständig beschreibbar ist (siehe Beispiele 4.1 und 4.2), kann nach diesen Betrachtungen stets orientiert werden. Existiert für  $\mathfrak{F}$  keine globale Karte, so gibt es zu jedem Flächenpunkt zumindest ein Flächenstück, das nur durch eine Karte beschreibbar ist und eine Orientierung im beschriebenen Sinne ermöglicht. Man stellt deshalb fest, dass jede als Mannigfaltigkeit definierbare  $C^2$ -Fläche stets lokal (d.h. in Umgebungen der Flächenpunkte) orientierbar ist. Eine derartige Fläche ist auch global orientierbar, wenn es gelingt, diese lokale Orientierbarkeit über die Kartenwechsel verträglich (d.h. unter Beibehaltung der gleichen Orientierung) von Flächenstück zu Flächenstück auf ganz  $\mathfrak{F}$  auszudehnen. Diese Überlegungen führen zu folgender notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Orientierbarkeit einer Fläche.

**Satz 4.1** Eine zusammenhängende Fläche  $\mathfrak{F}$  ist genau dann orientierbar, wenn es eine Familie von Karten  $\mu_\alpha : \mathfrak{F}_\alpha \rightarrow U_\alpha$  (bzw. Parametrisierungen  $\mathbf{X}_\alpha = \mu_\alpha^{-1} : U_\alpha \rightarrow \mathfrak{F}_\alpha$ ) gibt, so dass

a)  $\mathfrak{F} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathfrak{F}_\alpha$  ( $\mathfrak{F}_\alpha$  ist für jedes  $\alpha$  zusammenhängend) und

b) für jedes Indexpaar  $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$  mit  $\mathfrak{F}_\alpha \cap \mathfrak{F}_\beta \neq \emptyset$  und der Transformation

$\mathbf{u} = \Phi(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{X}_\alpha^{-1}(\mathbf{X}_\beta(\bar{\mathbf{u}}))$  gilt  $\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\mathbf{u}}}\right) > 0$  für alle  $\bar{\mathbf{u}} \in U_\beta$  mit  $\mathbf{X}_\beta(\bar{\mathbf{u}}) \in \mathfrak{F}_\alpha \cap \mathfrak{F}_\beta$ .

**Beweis.** (skizziert)

a) Ist  $\mathfrak{F}$  orientierbar, so existiert auf  $\mathfrak{F}$  ein stetiges Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{N}$ , welches vom Flächenpunkt  $\mathbf{X}$ , aber nicht von der konkreten Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  abhängt. Für  $\mathfrak{F}$  als Mannigfaltigkeit gibt es eine Familie von Flächenstücken  $\mathfrak{F}_\alpha$  mit  $\mathfrak{F} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathfrak{F}_\alpha$

und entsprechende (injektive) Parametrisierungen  $\mathbf{X}_\alpha = \mu_\alpha^{-1} : U_\alpha \rightarrow \mathfrak{F}_\alpha$ . Es ist dann erreichbar, dass für die Matrix  $\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \{\mathbf{T}_1(\mathbf{u}), \mathbf{T}_2(\mathbf{u}), \mathbf{N}_{\mathbf{X}}\}$ , deren Spaltenvektoren die Vektoren des begleitenden Dreibeins im Punkt  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_\alpha(\mathbf{u})$  sind, stets  $\det(\mathbf{B}(\mathbf{u})) > 0$  für alle  $\mathbf{u} \in U_\alpha$  und jedes  $\alpha \in \mathcal{I}$  gilt. Sollte für eine Parametrisierung  $\mathbf{X}_\alpha(\mathbf{u})$  die Determinante von  $\mathbf{B}(\mathbf{u})$  negativ sein, so erreicht man mit der Parametervertauschung  $\mathbf{u} = (u^1, u^2) \rightarrow \bar{\mathbf{u}} = (u^2, u^1)$  eine Vertauschung der Tangentenvektoren, aber keine Veränderung von  $\mathbf{N}_{\mathbf{X}}$  ( $\mathbf{N}_{\mathbf{X}}$  ist unabhängig von der Parametrisierung!) und damit  $\det(\mathbf{B}(\bar{\mathbf{u}})) > 0$ . Sind  $\mathfrak{F}_\alpha$  und  $\mathfrak{F}_\beta$  Flächenstücke aus dieser Familie mit  $\mathfrak{F}_\alpha \cap \mathfrak{F}_\beta \neq \emptyset$  und der Parametertransformation  $\mathbf{u} = \Phi(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{X}_\alpha^{-1}(\mathbf{X}_\beta(\bar{\mathbf{u}}))$  für alle  $\bar{\mathbf{u}} \in U_\beta$ , wobei  $\mathbf{X}_\beta(\bar{\mathbf{u}}) \in \mathfrak{F}_\alpha \cap \mathfrak{F}_\beta$ , so gilt für die Matrizen  $\mathbf{B}(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{u}})$  der begleitenden Dreibeine

in den Flächenpunkten von  $\mathfrak{F}_\alpha \cap \mathfrak{F}_\beta$  der Zusammenhang

$$\mathbf{B}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{B}(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen  $\det(\mathbf{B}(\mathbf{u})) > 0$  und  $\det(\mathbf{B}(\bar{\mathbf{u}})) > 0$  muss zwangsläufig  $\det\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}}\right) > 0$  sein.

b) Existiert wie angegeben eine Familie von Flächenstücken  $\mathfrak{F}_\alpha$ , so kann auf jedem dieser Flächenstücke ein stetiges Einheitsnormalenfeld gemäß

$$\mathbf{N}_{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{T}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{T}_2(\mathbf{u})}{\|\mathbf{T}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{T}_2(\mathbf{u})\|} \quad \mathbf{u} \in U_\alpha, \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$$

angegeben werden. Wegen  $\det\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}}\right) > 0$  besitzen bei einer Umparametrisierung die Tangentenbasissysteme  $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\}$  und  $\{\bar{\mathbf{T}}_1, \bar{\mathbf{T}}_2\}$  die gleiche Orientierung, woraus die Gleichheit der Normalenvektoren folgt:

$$\mathbf{N}_{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{T}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{T}_2(\mathbf{u})}{\|\mathbf{T}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{T}_2(\mathbf{u})\|} = \frac{\bar{\mathbf{T}}_1(\bar{\mathbf{u}}) \times \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{\mathbf{u}})}{\|\bar{\mathbf{T}}_1(\bar{\mathbf{u}}) \times \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{\mathbf{u}})\|} = \bar{\mathbf{N}}_{\mathbf{X}}.$$

Damit setzt sich die Stetigkeit von  $\mathbf{N}_{\mathbf{X}}$  über die Kartenwechsel auf  $\mathfrak{F}$  fort. ■

**Beispiel 4.4** Eine Fläche  $\mathfrak{F}$ , die durch eine stetig differenzierbare Funktion  $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  erzeugt wird, besitzt eine globale Karte (siehe Beispiel 4.2) und ist damit stets orientierbar. In jedem Flächenpunkt  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  bilden die Vektoren

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_{,1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_2(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_{,2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{N}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{1 + g_{,1}^2 + g_{,2}^2}} \begin{pmatrix} -g_{,1} \\ -g_{,2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

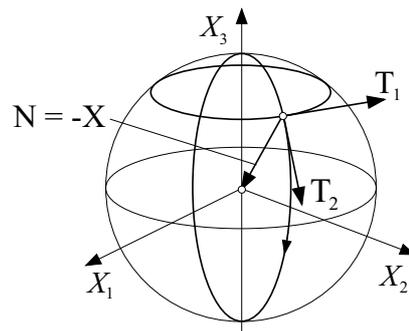
ein positiv orientiertes begleitendes Dreibein und  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  ist ein stetiges Einheitsnormalenfeld. Die Ortsvektoren  $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$  der Tangentialebene an  $\mathfrak{F}$  im Flächenpunkt  $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0 = g(x_0, y_0))^T$  werden durch die Gleichung

$$z - z_0 = g_{,1}(x - x_0) + g_{,2}(y - y_0)$$

beschrieben.

**Beispiel 4.5** Mit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  des Flächenstückes  $S_0^2$  der Einheitskugel  $S^2$  (siehe Beispiel 4.3) erhält man in den Punkten von  $S_0^2$  die begleitenden Dreibeine (siehe Abb. 4.8)

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\sin(u^1) \sin(u^2) \\ \cos(u^1) \sin(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_2(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos(u^1) \cos(u^2) \\ \sin(u^1) \cos(u^2) \\ -\sin(u^2) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{N}(\mathbf{u}) = -\mathbf{X}(\mathbf{u}).$$

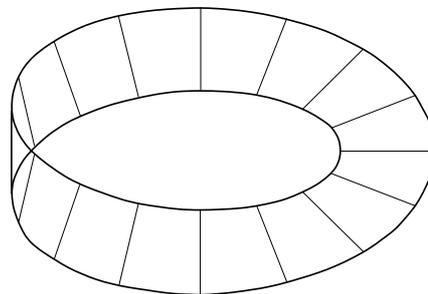


Daraus folgen sofort die begleitenden Dreibeine der Parametrisierung  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{Q}\mathbf{X}(\bar{\mathbf{u}})$  ( $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{U} = U$ ) in den Punkten des Flächenstückes  $\bar{S}_0^2$  von  $S^2$ :

$$\bar{\mathbf{T}}_1(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{Q}\mathbf{T}_1(\bar{\mathbf{u}}); \quad \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{Q}\mathbf{T}_2(\bar{\mathbf{u}}); \quad \bar{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{u}}) = -\mathbf{Q}\mathbf{X}(\bar{\mathbf{u}}) = -\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}}).$$

Da  $S_0^2$  und  $\bar{S}_0^2$  zusammen die Einheitskugel vollständig überdecken, existiert mit  $\mathbf{N} = -\mathbf{X}$  und  $\|\mathbf{X}\| = 1$  auf  $S^2$  ein stetiges Einheitsnormalenfeld, womit  $S^2$  orientierbar ist. Die beiden Parametrisierungen  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  und  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}})$  sind GAUßsche Parametrisierungen und die begleitenden Dreibeine bilden in jedem Flächenpunkt ein orthogonales Basissystem im  $\mathbb{R}^3$ .

**Beispiel 4.6** Unter einem **Möbius-Band** versteht man ein langes Band konstanter Breite, wobei ein Ende gegenüber dem anderen um  $180^\circ$  verdreht und dann mit dem anderen Ende verklebt ist. Dieses Band bildet eine Fläche  $\mathfrak{F}$  im  $\mathbb{R}^3$ , die nicht orientierbar ist. Dies resultiert aus folgender Überlegung: Bewegt man sich längs einer geschlossenen Kurve, die auf dem Band verläuft und dieses einmal vollständig umrundet, wobei ein Vektor mitgeführt wird, der stets normal zur Fläche gerichtet ist und sich stetig längs der Kurve ändert, so stellt man nach einer vollen Umrundung der Kurve fest, dass die Vektoren im Ausgangs- und Endpunkt nicht übereinstimmen. Dieser Versuch kann mit einer beliebigen derartigen Kurve bei verschiedenen Ausgangspunkten wiederholt werden; stets erhält man im gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt verschieden gerichtete Normalenvektoren. Es kann deshalb für das MÖBIUS-Band kein stetiges Einheitsnormalenfeld geben und eine Orientierung des Bandes im Sinne der Definition ist nicht möglich.



Eine Parametrisierung des MÖBIUS-Bandes kann in Form einer Regelfläche (siehe Abschnitt 4.9) wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \cos(u^1) \\ \sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} \cos(u^1) \cos(u^1/2) \\ \sin(u^1) \cos(u^1/2) \\ \sin(u^1/2) \end{pmatrix}; \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R} \times (-1, 1).$$

### 4.3. Erste metrische Fundamentalform

Ziel dieses Abschnittes ist es, auf Flächen ein Maß einzuführen, mit dem z.B. die Länge einer Kurve, die ganz auf der Fläche verläuft, oder der Inhalt eines flächenhaften Bereiches bestimmt werden können. Dieses Maß benutzen Flachländer, wenn sie geometrische Objekte auf einer Fläche vermessen. Dabei handelt es sich nicht um eine "Meßplatte" im herkömmlichen Sinne, sondern man muss zu "infinitesimal kleinen" Größen zurückgehen, die mit Vektoren aus den Tangentialräumen der Flächenpunkte beschrieben werden. Durch nachfolgende Integrationsprozesse lassen sich damit die angestrebten Maße berechnen.

Im Weiteren sei  $(f)$  eine Fläche im Sinne der Definition 4.1 mit einer bekannten Parametrisierung  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} = (u^1, u^2)^T \in U$ ). Eine Kurve  $(c)$ , deren Spur  $\mathbf{c}$  in der Spur  $f$  von  $(f)$  enthalten ist, heißt **Flächenkurve**. Parametrisierungen  $\mathbf{x}(t)$  ( $t \in I$ ) einer Flächenkurve können mit der Parametrisierung der Fläche  $(f)$  wie folgt verbunden werden:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{X}(u^1(t), u^2(t)) \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}(t) \in U \quad \text{für alle } t \in I.$$

Zur Bestimmung der Länge  $L = \int_I ds$  von  $(c)$  (siehe Definition 3.5) muss das Bogenelement  $ds = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt$  festgestellt werden. Mit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^1} \dot{u}^1 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^2} \dot{u}^2 = \mathbf{J}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}(t)) \dot{\mathbf{u}} \quad \text{und} \\ \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^2 &= (\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = (\mathbf{J}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}(t)) \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{J}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}(t)) \dot{\mathbf{u}}) = (\mathbf{G}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}(t)) \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}) \end{aligned}$$

erhält man

$$ds = \sqrt{(\mathbf{G}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}(t)) \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})} dt.$$

**Definition 4.8** Die Matrix

$$\mathbf{G}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \mathbf{J}_{\mathbf{X}}^T(\mathbf{u}) \mathbf{J}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} G_{11}(\mathbf{u}) & G_{12}(\mathbf{u}) \\ G_{21}(\mathbf{u}) & G_{22}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

heißt **erste metrische Fundamentalgröße** und die Koeffizienten

$$G_{ij}(\mathbf{u}) = \left( \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial u^j} \right) = (\mathbf{T}_i(\mathbf{u}), \mathbf{T}_j(\mathbf{u})) \quad i, j = 1, 2 \quad (4.7)$$

**Metrikoeffizienten** der Fläche  $(f)$  im Punkt  $\mathbf{X}$  mit der Parametrisierung  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$ .

Die auf dem Tangentialraum  $\mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  definierte bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\mathbf{X}}(\cdot, \cdot) &: \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \times \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{gemäß} \\ \mathbf{U} = U^1 \mathbf{T}_1 + U^2 \mathbf{T}_2 & \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \rightarrow G_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = G_{ij}(\mathbf{u}) U^i V^j \in \mathbb{R} \\ \mathbf{V} = V^1 \mathbf{T}_1 + V^2 \mathbf{T}_2 & \end{aligned}$$

nennt man **erste metrische Fundamentalform** der Fläche  $(f)$  im Punkt  $\mathbf{X}$ .

**Bemerkung 4.8** Die Matrix  $\mathbf{G}_\mathbf{X}$  ist symmetrisch und positiv definit. Die Symmetrie folgt aus  $G_{12} = (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) = (\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1) = G_{21}$ . Da stets eine reguläre Flächenparametrisierung vorausgesetzt wird, sind die Tangentenbasisvektoren  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$  in jedem Flächenpunkt linear unabhängig. Folglich ist

$$\begin{aligned} \|U^1\mathbf{T}_1 + U^2\mathbf{T}_2\|^2 &= (U^1\mathbf{T}_1 + U^2\mathbf{T}_2, U^1\mathbf{T}_1 + U^2\mathbf{T}_2) \\ &= (U^1, U^2) \mathbf{G}_\mathbf{X} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} > 0 \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

woraus die positive Definitheit von  $\mathbf{G}_\mathbf{X}$  sich ergibt.  $\mathbf{G}_\mathbf{X}$  ist genau dann eine Diagonalmatrix, wenn es sich bei  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  um eine GAUßsche Parametrisierung (siehe Definition 4.4) handelt.

**Bemerkung 4.9** Häufig bezeichnet man die Metrikkoeffizienten mit den ursprünglich von GAUß eingeführten Buchstaben  $E = G_{11}$ ,  $G = G_{22}$  und  $F = G_{12} = G_{21}$ , womit die Fundamentalgröße die folgende Form annimmt:

$$\mathbf{G}_\mathbf{X}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} E(\mathbf{u}) & F(\mathbf{u}) \\ F(\mathbf{u}) & G(\mathbf{u}) \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 4.10** Geht man zu einer anderen Flächenparametrisierung  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}})$  mit der Transformation  $\mathbf{u} = \Phi(\bar{\mathbf{u}})$  über, so entsteht mit  $\bar{\mathbf{J}}_\mathbf{X}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{J}_\mathbf{X}(\Phi(\bar{\mathbf{u}})) \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{u}})$  (siehe (4.3)) der nachfolgende Zusammenhang zwischen den metrischen Fundamentalgrößen  $\bar{\mathbf{G}}_\mathbf{X}$  und  $\mathbf{G}_\mathbf{X}$  beider Parametrisierungen

$$\bar{\mathbf{G}}_\mathbf{X}(\bar{\mathbf{u}}) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{u}}) \right)^T \mathbf{G}_\mathbf{X}(\Phi(\bar{\mathbf{u}})) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{u}}) \right). \quad (4.8)$$

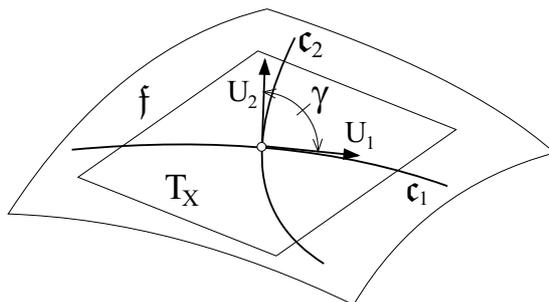
Demgegenüber ist die metrische Fundamentalform unabhängig (invariant) von einer Flächenparametrisierung und es gilt

$$\bar{G}_{ij} \bar{U}^i \bar{V}^j = G_{ij} U^i V^j$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} \bar{U}^1 \\ \bar{U}^2 \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right)^{-1} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \bar{V}^1 \\ \bar{V}^2 \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right)^{-1} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

**Bemerkung 4.11** Haben die beiden Flächenkurven  $(\mathbf{c}_1)$  und  $(\mathbf{c}_2)$  mit den Parametrisierungen  $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{X}(\mathbf{u}_i(t))$  ( $t \in I_i$ ;  $i = 1, 2$ ) einen gemeinsamen Schnittpunkt  $\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}_2(t_2) = \mathbf{X}$ , so schließen die Tangentenvektoren  $\mathbf{U}_i = \dot{\mathbf{x}}_i(t_i) = \mathbf{T}_j \dot{u}_i^j(t_i)$  an die Kurven in diesem Punkt  $\mathbf{X}$  den Schnittwinkel  $\gamma = \sphericalangle(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$  ein und es gilt

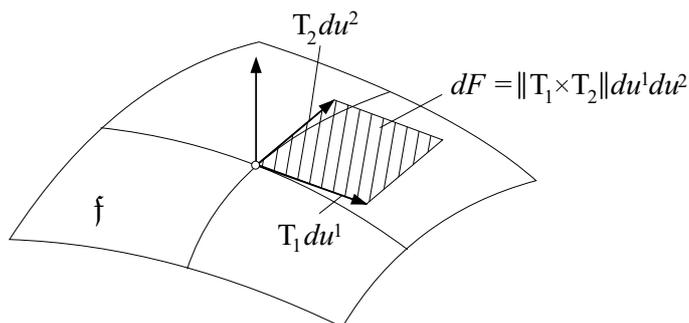
$$\cos(\gamma) = \frac{(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)}{\|\mathbf{U}_1\| \|\mathbf{U}_2\|} = \frac{(\mathbf{G}_\mathbf{X} \dot{\mathbf{u}}_1(t_1), \dot{\mathbf{u}}_2(t_2))}{\sqrt{(\mathbf{G}_\mathbf{X} \dot{\mathbf{u}}_1(t_1), \dot{\mathbf{u}}_1(t_1))} \sqrt{(\mathbf{G}_\mathbf{X} \dot{\mathbf{u}}_2(t_2), \dot{\mathbf{u}}_2(t_2))}}. \quad (4.10)$$



Aus (4.10) und Bemerkung 4.10 geht hervor, dass  $\cos(\gamma)$  und damit auch  $\gamma$  unabhängig von der Flächenparametrisierung sind.

**Bemerkung 4.12** Zur Flächenberechnung greift man auf ein **Flächenelement**  $dF$  zurück, welches über das Vektorprodukt der “infinitesimal kleinen” Tangentenvektoren  $\mathbf{T}_1 du^1, \mathbf{T}_2 du^2$  gebildet wird (siehe Abb. 4.11):

$$dF = \|\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2\| du^1 du^2.$$



Mit der LAGRANGEschen Identität (2.2) ergibt sich

$$\|\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2\|^2 = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2) = \begin{vmatrix} (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1) & (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) \\ (\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1) & (\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2) \end{vmatrix} = \det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})$$

und weiter

$$dF = \sqrt{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}))} du^1 du^2. \quad (4.11)$$

Für einen Parameterbereich  $U_0 \subseteq U$  berechnet man den Inhalt  $A$  des Flächenstückes  $\mathbf{X}(U_0)$  aus

$$A = \iint_{\mathbf{X}(U_0)} dF = \iint_{U_0} \sqrt{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}))} du^1 du^2.$$

**Beispiel 4.7** Für jeden Punkt einer Ebene (siehe Beispiel 4.1) erhält man die konstanten Tangentebasisvektoren  $\mathbf{T}_1 = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{T}_2 = \mathbf{b}$  und damit die konstante Fundamentalgröße

$$\mathbf{G}_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{pmatrix}.$$

Bilden die Richtungsvektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  im  $\mathbb{R}^3$  ein Orthonormalsystem, so ist  $\mathbf{G}_\mathbf{x} = \mathbf{I}$  und folglich

$$ds = \sqrt{(\dot{u}^1(t))^2 + (\dot{u}^2(t))^2} dt; \quad dF = du^1 du^2.$$

Damit sind die metrischen Verhältnisse auf  $\mathfrak{E}$  analog denen im  $\mathbb{R}^2$ .

**Beispiel 4.8** Für eine durch die stetig differenzierbare Funktion  $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gebildete Fläche (siehe Beispiele 4.2 und 4.4) ergibt sich die Fundamentalgröße

$$\mathbf{G}_\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 + g_{,1}^2 & g_{,1}g_{,2} \\ g_{,1}g_{,2} & 1 + g_{,2}^2 \end{pmatrix}.$$

Das Flächenelement  $dF$  ist mit  $dF = \sqrt{1 + g_{,1}^2 + g_{,2}^2} du^1 du^2$  gegeben.

**Beispiel 4.9** Für die Einheitskugel  $S^2$  (siehe Beispiel 4.3) leitet man mit der Parametrisierung  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$  für  $S_0^2$  und den im Beispiel 4.5 angegebenen Tangentenbasisvektoren die Fundamentalgröße

$$\mathbf{G}_\mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \sin^2(u^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ab. Das Flächenelement ist mit  $dF = \sin(u^2) du^1 du^2$  ( $0 < u^2 < \pi$ ) gegeben.

## 4.4. Zweite metrische Fundamentalform

Ein Weltbeobachter im  $\mathbb{R}^3$  wird an einem Maß interessiert sein, mit dem er die Krümmung im Raum quantitativ beurteilen kann. Es ist naheliegend, ein solches Maß in Analogie zur Krümmung einer Kurve im Raum einzuführen. Diese wurde (siehe Def. 3.8) als Ableitung, oder anschaulich ausgedrückt, als Änderungsgeschwindigkeit des Tangentenvektors der Kurve definiert. Die Geschwindigkeit, mit der sich der Tangentenvektor beziehungsweise die Richtung der Kurventangente ändert, bildet die Grundlage zur Messung der Krümmung. Die Rolle der Tangente einer Kurve übernimmt bei Flächen die Tangentialebene. Die Lage dieser Ebene im Raum wird eindeutig durch ihren Normalenvektor bestimmt. Es erscheint deshalb sinnvoll, von der Änderungsgeschwindigkeit (Ableitung) des Normalenvektors in Abhängigkeit von einer Richtung, in die man sich auf der Fläche bewegt, als Maß für die Flächenkrümmung auszugehen.

In diesem Abschnitt sei  $(\mathbf{f})$  ein orientiertes Flächenstück mit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ) und dem glatten Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ . Auf  $(\mathbf{f})$  verlaufe eine Flächenkurve mit der Parametrisierung  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(t))$  ( $t \in I$ ) und dem Tangentenvektor  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} \dot{u}^i = \dot{u}^1 \mathbf{T}_1 + \dot{u}^2 \mathbf{T}_2$ . Für die Ableitung (Änderungsgeschwindigkeit) von  $\mathbf{N}$  entlang der Kurve ergibt sich

$$\dot{\mathbf{N}} \equiv \frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u^1} \dot{u}^1 + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u^2} \dot{u}^2 = \mathbf{N}_{,i} \dot{u}^i.$$

Wegen  $\|\mathbf{N}\|^2 = (\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 1$  ist  $\frac{d}{dt} (\|\mathbf{N}\|^2) = 2(\mathbf{N}, \dot{\mathbf{N}}) = 0$  und damit  $\dot{\mathbf{N}}$  in jedem Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(t)$  ein Vektor aus dem Tangentialraum  $\mathbf{T}_{\mathbf{x}(t)}$  des Flächenstückes. In jedem Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(t)$  wird damit dem Tangentenvektor  $\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathbf{T}_{\mathbf{x}(t)}$  der Vektor  $\dot{\mathbf{N}}(\mathbf{u}(t)) \in \mathbf{T}_{\mathbf{x}(t)}$  zugeordnet.

Die Ableitung des Einheitsnormalenfeldes  $\mathbf{N}$  in einem festen Flächenpunkt  $\mathbf{X}$  ist folglich nur vom Tangentenvektor der Kurve in diesem Punkt abhängig. Allen Kurven  $\mathbf{x}(t)$ , die durch  $\mathbf{X}$  verlaufen und an dieser Stelle den gleichen Tangentenvektor  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{U} = U^1\mathbf{T}_1 + U^2\mathbf{T}_2$  besitzen, wird die gleiche Ableitung  $\dot{\mathbf{N}}_{\mathbf{X}}$  zugeordnet. Es kann deshalb zu jedem festen Punkt  $\mathbf{X}$  eine Abbildung definiert werden, die jedem Tangentenvektor  $\mathbf{U} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  die Ableitung des Einheitsnormalenfeldes  $\dot{\mathbf{N}}_{\mathbf{X}} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  in Richtung  $\mathbf{U}$  zuordnet. Diese Abbildung ist offensichtlich linear.

**Definition 4.9** Die Abbildung  $W_{\mathbf{X}} : \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  gemäß

$$\mathbf{U} = U^1\mathbf{T}_1 + U^2\mathbf{T}_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \rightarrow W_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}) = -(U^1\mathbf{N}_{,1} + U^2\mathbf{N}_{,2}) \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \quad (4.12)$$

heißt **WEINGARTEN-Abbildung**.

Die bilineare Abbildung  $L_{\mathbf{X}}(\cdot, \cdot) : \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \times \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbb{R}$  gemäß

$$\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \rightarrow L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (W_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}), \mathbf{V}) \in \mathbb{R} \quad (4.13)$$

nennt man **zweite metrische Fundamentalform**.

**Bemerkung 4.13** Mit den Basisdarstellungen  $\mathbf{U} = U^1\mathbf{T}_1 + U^2\mathbf{T}_2$  und  $\mathbf{V} = V^1\mathbf{T}_1 + V^2\mathbf{T}_2$  erhält die zweite metrische Fundamentalform die Gestalt

$$L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = -(\mathbf{N}_{,i}, \mathbf{T}_j) U^i V^j = (U^1, U^2) \mathbf{L}_{\mathbf{X}} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathbf{L}_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

und

$$L_{ij} = -(\mathbf{N}_{,i}, \mathbf{T}_j) = -(\mathbf{N}_{,i}, \mathbf{X}_{,j}) \quad i, j = 1, 2. \quad (4.15)$$

Die Matrix  $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}$  wird im Folgenden **zweite metrische Fundamentalgröße** genannt. Aus der Orthogonalität  $\mathbf{N} \perp \mathbf{T}_j = \mathbf{X}_{,j}$  ( $j = 1, 2$ ) leitet man

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^i} (\mathbf{N}(\mathbf{u}), \mathbf{T}_j(\mathbf{u})) = (\mathbf{N}_{,i}(\mathbf{u}), \mathbf{T}_j(\mathbf{u})) + (\mathbf{N}(\mathbf{u}), \mathbf{X}_{,ji}(\mathbf{u}))$$

ab. Damit ergeben sich folgende Ausdrücke für die Koeffizienten von  $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$ :

$$L_{ij}(\mathbf{u}) = -(\mathbf{N}_{,i}(\mathbf{u}), \mathbf{T}_j(\mathbf{u})) = (\mathbf{N}(\mathbf{u}), \mathbf{X}_{,ji}(\mathbf{u})). \quad (4.16)$$

Mit dem Satz von SCHWARZ über die Vertauschbarkeit stetiger zweiter Ableitungen erhält man:

$$L_{12} = (\mathbf{N}, \mathbf{X}_{,21}) = (\mathbf{N}, \mathbf{X}_{,12}) = L_{21}$$

und damit die Symmetrie der Matrix  $\mathbf{L}_X$ . Im Allgemeinen ist jedoch  $\mathbf{L}_X$  nicht positiv definit. Es ist auch üblich, die Koeffizienten von  $\mathbf{L}_X$  in der folgenden (wieder auf GAUß zurückgehenden) Weise zu bezeichnen:

$$\mathbf{L}_X(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} L(\mathbf{u}) & M(\mathbf{u}) \\ M(\mathbf{u}) & N(\mathbf{u}) \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 4.14** Es liegt nahe, die Bilder der WEINGARTEN-Abbildung, die zunächst in der Basis  $\mathbf{N}_{,1}, \mathbf{N}_{,2}$  gegeben sind, auch in der Tangentenbasis  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$  darzustellen. Dazu muss die Basistransformation  $\mathbf{N}_{,i} = b_i^j \mathbf{T}_j$  ( $i = 1, 2$ ) vorgenommen werden. Mit

$$-L_{ik} = (\mathbf{N}_{,i}, \mathbf{T}_k) = b_i^m (\mathbf{T}_m, \mathbf{T}_k) = b_i^m G_{mk}$$

ergibt sich unter Beachtung von  $G_{mk} G^{kj} = \delta_m^j$  für die Transformationskoeffizienten:

$$b_i^j = b_i^m \delta_m^j = b_i^m G_{mk} G^{kj} = -L_{ik} G^{kj} \equiv -L_i^j.$$

Die daraus resultierenden Darstellungen für die Ableitungen des Einheitsnormalenfeldes

$$\mathbf{N}_{,i} = -L_i^j \mathbf{T}_j = -L_{ik} G^{kj} \mathbf{T}_j \quad i = 1, 2 \quad (4.17)$$

heißen **Ableitungsgleichungen nach WEINGARTEN**. Symbolisch können diese Gleichungen in zusammengefasster Form wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_{,1} \\ \mathbf{N}_{,2} \end{pmatrix} = -\mathbf{L}_X \mathbf{G}_X^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

**Bemerkung 4.15** Mit einem Tangentenvektor  $\mathbf{U} = U^i \mathbf{T}_i$  erhält man für die WEINGARTEN-Abbildung

$$\mathbf{W}_X(\mathbf{U}) = -U^i \mathbf{N}_{,i} = U^i L_i^j \mathbf{T}_j = U^i L_{ik} G^{kj} \mathbf{T}_j = W^j \mathbf{T}_j \equiv \mathbf{W}, \quad (4.19)$$

wobei zwischen den Koordinaten von  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{W}$  der Zusammenhang

$$W^j = L_{ik} G^{kj} U^i = L_i^j U^i \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_X^{-1} \mathbf{L}_X \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

besteht.

**Bemerkung 4.16** Beim Übergang zu einer anderen Flächenparametrisierung  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}})$  mit der Transformationsmatrix  $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}}$  und  $\det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right) > 0$  bleibt die Richtung des Einheitsnormalenfeldes  $\mathbf{N}$  unverändert. Im Falle  $\det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right) < 0$  kommt es zu einem Vorzeichenwechsel der Normalenrichtung (siehe Bemerkung 4.7) und damit auch zu einem

Vorzeichenwechsel in der WEINGARTEN-Abbildung. Mit der Transformation (4.9) besteht zwischen den zweiten Fundamentalgrößen  $\bar{\mathbf{L}}_{\mathbf{X}}$  und  $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}$  beider Parametrisierungen der Zusammenhang

$$\bar{\mathbf{L}}_{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}}) = \pm \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{u}}) \right)^T \mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\Phi(\bar{\mathbf{u}})) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{u}}) \right),$$

wobei das Minuszeichen im Falle  $\det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right) < 0$  zu nehmen ist. Bei einer orientierungstreuen Parametertransformation bleibt die zweite metrische Fundamentalform invariant:

$$\bar{L}_{ij} \bar{U}^i \bar{U}^j = \pm L_{ij} U^i U^j.$$

Lediglich im Falle einer Umorientierung der Fläche ändert sich das Vorzeichen dieses Ausdruckes.

**Beispiel 4.10** Das Einheitsnormalenfeld einer Ebene (siehe Beispiel 4.1) ist konstant:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}.$$

Damit verschwinden alle Ableitungen  $\mathbf{N}_{,i}$  von  $\mathbf{N}$  und folglich auch die WEINGARTEN-Abbildung:  $W_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$  und  $L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = 0$ .

**Beispiel 4.11** Ist eine Fläche durch eine Funktion  $X_3 = g(u^1, u^2)$  gegeben, so erhält man direkt aus den Formeln für die begleitenden Dreibeine (siehe Beispiel 4.4)

$$L_{ij} = -(\mathbf{N}_{,i}, \mathbf{T}_j) = (\mathbf{N}, \mathbf{T}_{j,i}) = \frac{g_{,ji}}{\sqrt{1 + g_{,1}^2 + g_{,2}^2}} \quad \text{und}$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{X}} = \frac{1}{\sqrt{1 + g_{,1}^2 + g_{,2}^2}} \begin{pmatrix} g_{,11} & g_{,12} \\ g_{,12} & g_{,22} \end{pmatrix}.$$

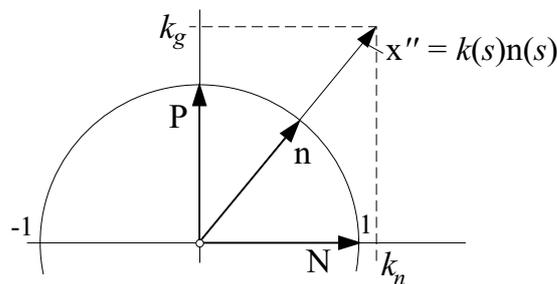
**Beispiel 4.12** Die Einheitskugel  $S^2$  hat das Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{N}(\mathbf{u}) = -\mathbf{X}(\mathbf{u})$  (siehe Beispiel 4.5). Damit ist  $\mathbf{N}_{,i} = -\mathbf{X}_{,i} = -\mathbf{T}_i$  und folglich die WEINGARTEN-Abbildung  $W_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$  für alle  $\mathbf{U} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$ . Die zweite metrische Fundamentalform ist gleich der ersten:  $L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = G_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ .

## 4.5. Krümmung

Die Krümmung einer Fläche ( $\mathbf{f}$ ) wird zurückgeführt auf die Krümmung von Kurven, die auf ( $\mathbf{f}$ ) verlaufen. Die Krümmung ist deshalb nicht mehr ein einfacher Zahlenwert (skalare Größe), der einem Flächenpunkt  $\mathbf{X}$  zugeordnet ist, sondern hängt auch von einer "Richtung" aus dem Tangentialraum  $\mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  ab.

Es sei  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ) eine Parametrisierung von  $(\mathbf{f})$  und  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(s))$  ( $s \in I$ ) die Parametrisierung einer auf der Fläche verlaufenden Kurve  $(\mathbf{c})$  nach der Bogenlänge  $s$ . Tangentenvektor  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s)$  von  $(\mathbf{c})$  und Normalenvektor  $\mathbf{N}(\mathbf{u}(s))$  der Fläche  $(\mathbf{f})$  im Punkt  $\mathbf{X}(\mathbf{u}(s))$  können mit  $\mathbf{P}(s) = \mathbf{N}(\mathbf{u}(s)) \times \mathbf{t}(s)$  zu einer orthonormalen Basis des  $\mathbb{R}^3$  ergänzt werden. Die Krümmung  $k(s)$  und der Hauptnormalenvektor  $\mathbf{n}(s)$  der Kurve  $(\mathbf{c})$  stehen mit  $\mathbf{x}''(s)$  in der Beziehung  $\mathbf{x}''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$  (siehe (3.6) mit (3.8)). Wegen  $\mathbf{n}(s) \perp \mathbf{t}(s)$  ist  $\mathbf{n}(s)$  und damit auch  $\mathbf{x}''(s)$  eine Linearkombination von  $\mathbf{N}(\mathbf{u}(s))$  und  $\mathbf{P}(s)$  (siehe Abb. 4.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(s) &= (\mathbf{x}''(s), \mathbf{N}) \mathbf{N}(\mathbf{u}(s)) + (\mathbf{x}''(s), \mathbf{P}) \mathbf{P}(s) \\ &= k_n(s) \mathbf{N}(\mathbf{u}(s)) + k_g(s) \mathbf{P}(s) = k(s) \mathbf{n}(s). \end{aligned} \quad (4.21)$$



Aus der Orthogonalität von  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{P}$  folgt außerdem  $k^2(s) = k_n^2(s) + k_g^2(s)$ .

**Definition 4.10** Die Größe

$$k_n(s) = (\mathbf{x}''(s), \mathbf{N}) = k(s) (\mathbf{n}(s), \mathbf{N}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{u}(s)) \quad (4.22)$$

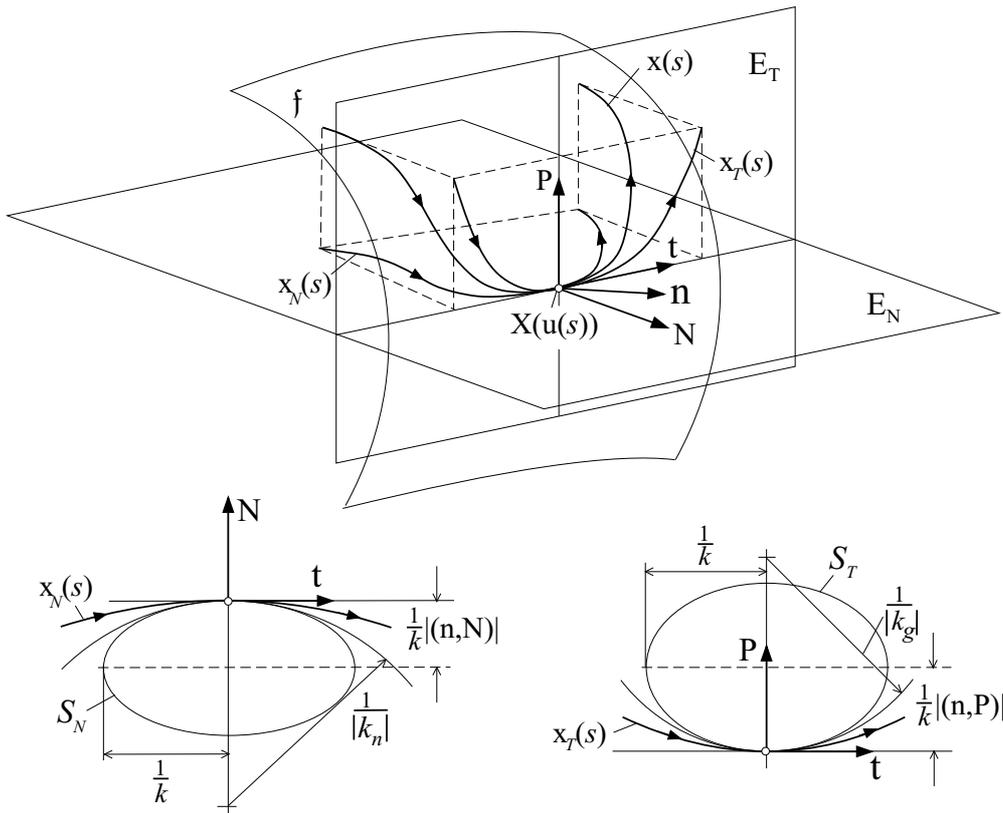
heißt **Normalkrümmung** und die Größe

$$k_g(s) = (\mathbf{x}''(s), \mathbf{P}(s)) = (\mathbf{x}''(s), \mathbf{N} \times \mathbf{t}(s)) = [\mathbf{N}, \mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s)] \quad (4.23)$$

die **geodätische Krümmung** der Kurve  $(\mathbf{c})$  mit der Parametrisierung  $\mathbf{x}(s)$  im Flächenpunkt  $\mathbf{X}(\mathbf{u}(s))$ .

**Geometrische Interpretation der Krümmungen  $k_n$  und  $k_g$ :**

Die von  $\mathbf{t}(s)$  und  $\mathbf{P}(s)$  aufgespannte Ebene  $\mathbf{E}_T$  ist identisch mit der im Punkt  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(s))$  angehefteten Tangentialebene  $\mathbf{E}_X$ . Senkrecht zu  $\mathbf{E}_T$  steht die ebenfalls den Punkt  $\mathbf{X}(\mathbf{u}(s))$  enthaltende und von  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{N}$  aufgespannte Ebene  $\mathbf{E}_N$  (siehe Abb. 4.13). Die orthogonalen Projektionen der Flächenkurve  $\mathbf{x}(s)$  in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $\mathbf{X}(\mathbf{u}(s))$  auf diese Ebenen führen zu ebenen Kurven  $\mathbf{x}_N(s) \subset \mathbf{E}_N$  und  $\mathbf{x}_T(s) \subset \mathbf{E}_T$  ( $s$  ist nicht mehr der Parameter der Bogenlänge für  $\mathbf{x}_N(s)$  und  $\mathbf{x}_T(s)$ !).



Der Krümmungskreis  $S$  in der von  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{n}$  aufgespannten Schmiegeebene zum Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(s)$  berührt die räumliche Kurve an dieser Stelle von zweiter Ordnung und besitzt den Radius  $1/k(s)$  (siehe Abschnitt 3.3). Damit berühren sich auch die entsprechenden orthogonalen Projektionen  $S_N$ ,  $\mathbf{x}_N$  auf  $\mathbf{E}_N$  und  $S_T$ ,  $\mathbf{x}_T$  auf  $\mathbf{E}_T$  beider Kurven im Punkt  $\mathbf{x}(s)$  von zweiter Ordnung und besitzen deshalb in diesen Punkten auch die gleiche (orientierte) Krümmung. Die Projektion  $S_N$  des Krümmungskreises  $S$  auf die Ebene  $\mathbf{E}_N$  ist eine Ellipse mit den Hauptachsen  $\frac{1}{k}$  und  $\frac{1}{k} |(\mathbf{n}, \mathbf{N})|$ . Entsprechend ist  $S_T$  eine Ellipse mit den Hauptachsen  $\frac{1}{k}$  und  $\frac{1}{k} |(\mathbf{n}, \mathbf{P})|$ . Im Berührungspunkt  $\mathbf{x}(s)$  hat nach Beispiel 3.8 die Ellipse  $S_N$  eine minimale Krümmung mit dem Betrag

$$\frac{\frac{1}{k} |(\mathbf{n}, \mathbf{N})|}{\left(\frac{1}{k}\right)^2} = |(k\mathbf{n}, \mathbf{N})| = |(\mathbf{x}''(s), \mathbf{N})| = |k_n(s)|.$$

Für den Betrag der Krümmung der Ellipse  $S_T$  im Berührungspunkt  $\mathbf{x}(s)$  erhält man ebenso den Wert  $|k_g(s)|$ . Folglich sind die Beträge der Normalkrümmung und der geodätischen Krümmung gleich den Beträgen der Krümmungen der ebenen Kurven  $\mathbf{x}_N(s)$  und  $\mathbf{x}_T(s)$  im Punkt  $\mathbf{x}(s)$ . Dieser Zusammenhang kann als Rechtfertigung angesehen werden, die Größen  $k_n$  und  $k_g$  als Krümmungen zu bezeichnen.

Die geodätische Krümmung beschreibt den Teil der Kurvenkrümmung, der in der Fläche selbst liegt. Ein Flachländer nimmt nur diesen Teil der Kurvenkrümmung wahr. Die geodätische Krümmung ist deshalb eine innergeometrische Größe der Fläche und wird im Abschnitt 4.8 weiter untersucht.

Die Normalkrümmung beschreibt die Krümmung entlang der Kurve eingebettet in

den dreidimensionalen Raum. Ein Flachländer kann diese Krümmung nicht wahrnehmen.

**Bemerkung 4.17** Durch Ableitung des Tangentenvektors  $\mathbf{x}'(s) = \mathbf{X}_{,j}(u^j)'$  einer Flächenkurve  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(s))$  erhält der Krümmungsvektor  $\mathbf{x}''(s)$  die Form

$$\mathbf{x}''(s) = \mathbf{X}_{,ji}(u^j)'(u^i)' + \mathbf{X}_{,j}(u^j)''.$$

Berücksichtigt man noch, dass  $(\mathbf{X}_{,j}, \mathbf{N}) = 0$  ( $i, j = 1, 2$ ) ist, so entsteht damit für die Normalkrümmung dieser Kurve der Ausdruck:

$$k_n = (\mathbf{x}'', \mathbf{N}) = (\mathbf{X}_{,ji}, \mathbf{N})(u^j)'(u^i)' = L_{ij}(u^j)'(u^i)' = (\mathbf{u}')^T \mathbf{L}_{\mathbf{x}(s)} \mathbf{u}'.$$

Aus dieser Darstellung wird deutlich, dass die Normalkrümmung einer Flächenkurve nur vom Tangentenvektor  $\mathbf{x}'(s) = \mathbf{X}_{,j}(u^j)'$  im Flächenpunkt  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(s))$  abhängt. Alle durch einen festen Flächenpunkt verlaufenden Kurven  $\mathbf{x}(s)$ , die in diesem Punkt den gleichen Tangentenvektor  $\mathbf{x}'(s)$  (mit  $\|\mathbf{x}'(s)\| = 1$ ) besitzen, haben die gleiche Normalkrümmung (Satz von MEUSNIER; siehe [Wüns]). Folglich kann von einer speziellen Flächenkurve abgesehen und einem Flächenpunkt  $\mathbf{X}$  eine Normalkrümmung in Richtung eines Einheitsvektors  $\mathbf{U} = U^i \mathbf{T}_i \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  zugeordnet werden:

$$k_n = L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = L_{ij}U^iU^j \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{U}\|^2 = G_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = G_{ij}U^iU^j = 1.$$

Man spricht deshalb von der Normalkrümmung  $k_n$  einer Fläche  $(\mathbf{f})$  im Punkt  $\mathbf{X}$  in Richtung  $\mathbf{U} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$ .  $k_n$  ist damit allein durch die zweite metrische Fundamentalform bzw. wegen  $L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = (W_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}), \mathbf{U})$  durch die WEINGARTEN-Abbildung bestimmt. Da beide Fundamentalformen unabhängig von einer orientierungserhaltenden Flächenparametrisierung sind, ist auch die Normalkrümmung unabhängig von einer konkreten Parametrisierung.

Aus dieser letzten Bemerkung folgt, dass alle Normalkrümmungen in einem festen Flächenpunkt  $\mathbf{X}$  als Funktionswerte folgender Abbildung angesehen werden können:

$$k_n : S_{\mathbf{X}} = \{\mathbf{U} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \mid \|\mathbf{U}\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{gemäß} \quad \mathbf{U} \in S_{\mathbf{X}} \rightarrow k_n = L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \in \mathbb{R}.$$

Unter der stets vorausgesetzten Glattheit der Parametrisierung ist  $k_n$  stetig. Da  $S_{\mathbf{X}}$  eine abgeschlossene und beschränkte (d.h. kompakte) Menge in  $\mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  ist, nimmt  $k_n$  auf  $S_{\mathbf{X}}$  ihr Maximum und Minimum an. Zu jedem Flächenpunkt  $\mathbf{X}$  gibt es folglich Tangentenvektoren  $\mathbf{U}_1 \in S_{\mathbf{X}}$  und  $\mathbf{U}_2 \in S_{\mathbf{X}}$  für die gilt:

$$\lambda_1 = L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1) = \max_{\mathbf{U} \in S_{\mathbf{X}}} L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) ; \quad \lambda_2 = L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_2) = \min_{\mathbf{U} \in S_{\mathbf{X}}} L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}).$$

**Definition 4.11** Die Extremwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  der quadratischen Form  $L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U})$  über alle  $\mathbf{U} \in S_{\mathbf{X}}$  heißen **Hauptkrümmungen** der Fläche  $(\mathbf{f})$  im Punkt  $\mathbf{X}$ . Die Vektoren  $\mathbf{U}_1$  und  $\mathbf{U}_2$ , für die  $L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U})$  diese Extremwerte annimmt, werden **Hauptkrümmungsrichtungen** im Punkt  $\mathbf{X}$  genannt.

Die Berechnung der Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen führt auf die Extremwertaufgabe

$$L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \rightarrow \text{Extremum mit der Nebenbedingung } \|\mathbf{U}\|^2 = G_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 1. \quad (4.24)$$

Diese Aufgabe ist auf der Grundlage der Methode der LAGRANGEschen Multiplikatoren (siehe [MeVa], Bd. 2, S.409) lösbar. Dazu führt man die Hilfsfunktion

$$L(\mathbf{U}, \lambda) = L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \lambda(1 - G_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U})) = L_{ij}U^iU^j + \lambda(1 - G_{ij}U^iU^j)$$

ein und erhält als notwendiges Kriterium für Extrema der Aufgabe (4.24) die Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial U^k} = (L_{ki} - \lambda G_{ki})U^i = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Zusammengefasst entsteht die Eigenwertgleichung

$$\left[ \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

deren Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  die Hauptkrümmungen sind. Die zugehörigen Eigenvektoren  $(U_k^1, U_k^2)^T$  ( $k = 1, 2$ ) müssen zusätzlich der Bedingung

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - G_{ij}U_k^iU_k^j = 0 \quad (k = 1, 2)$$

genügen. Diese entsprechen den Normierungsbedingungen  $\|\mathbf{U}_k\| = 1$  und legen im Falle  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  die Eigenvektoren bis auf ein Vorzeichen eindeutig fest. Aus den Eigenvektoren ergeben sich schließlich die Hauptkrümmungsrichtungen

$$\mathbf{U}_k = U_k^1 \mathbf{T}_1 + U_k^2 \mathbf{T}_2 \quad (k = 1, 2).$$

**Bemerkung 4.18** Im Falle  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  haben alle Normalkrümmungen im zugehörigen Flächenpunkt  $\mathbf{X}$  den gleichen Wert  $k_n = \lambda$  und die Fundamentalgrößen sind gemäß  $\mathbf{L}_{\mathbf{X}} = \lambda \mathbf{G}_{\mathbf{X}}$  proportional zueinander. Folglich sind auch alle Vektoren  $\mathbf{U} \in S_{\mathbf{X}}$  Hauptkrümmungsrichtungen. Ein Flächenpunkt, in dem dies der Fall ist, heißt **Nabelpunkt** der Fläche. Ist außerdem  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , so spricht man von einem **Flachpunkt** der Fläche.

**Beispiel 4.13** Für eine Ebene ist  $\mathbf{L}_{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$  (siehe Beispiel 4.10), so dass die Eigenwertgleichung (4.25) nur mit  $\lambda = 0$  erfüllt ist. Alle Punkte einer Ebene sind, wie man weiß, Flachpunkte.

Im Falle der Einheitssphäre  $S^2$  ist  $L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = G_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U})$  (siehe Beispiel 4.12) und damit  $\mathbf{L}_{\mathbf{X}} = \mathbf{G}_{\mathbf{X}}$ . Die Eigenwertgleichung (4.25) besitzt folglich die Eigenwerte  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Jeder Punkt auf  $S^2$  ist deshalb ein Nabelpunkt.

**Bemerkung 4.19** Bei unterschiedlichen Hauptkrümmungen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  sind die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$  orthogonal zueinander, d.h.  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$  bilden im Tangentialraum  $\mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  eine orthonormale Basis. Außerdem ist  $L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = 0$ .

**Beweis.** Unter Berücksichtigung der Symmetrie der beiden Fundamentalformen  $L_{\mathbf{X}}(\cdot, \cdot)$  und  $G_{\mathbf{X}}(\cdot, \cdot)$  ergeben sich aus der Eigenwertgleichung (4.25) die Gleichungen

$$L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) - \lambda_k G_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Nach Subtraktion beider Gleichungen voneinander entsteht

$$(\lambda_1 - \lambda_2) G_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = 0,$$

woraus die Orthogonalität von  $\mathbf{U}_1$  und  $\mathbf{U}_2$  folgt. Mit  $G_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = 0$  ergibt sich aus obiger Gleichung auch  $L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = 0$ . ■

**Bemerkung 4.20** Sind die Hauptkrümmungen  $\lambda_1, \lambda_2$  mit den zueinander orthonormalen Hauptkrümmungsrichtungen  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$  bekannt, so ist die Normalkrümmung  $k_n$  in eine beliebige Richtung  $\mathbf{U} \in S_{\mathbf{X}}$  aus der Formel

$$k_n = [(\mathbf{U}, \mathbf{U}_1)]^2 \lambda_1 + [(\mathbf{U}, \mathbf{U}_2)]^2 \lambda_2$$

berechenbar.

**Beweis.** Jeder Vektor  $\mathbf{U} \in S_{\mathbf{X}}$  ist in der Form  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}, \mathbf{U}_1) \mathbf{U}_1 + (\mathbf{U}, \mathbf{U}_2) \mathbf{U}_2$  darstellbar. Wegen  $L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = 0$  (siehe Bemerkung 4.19) ist dann

$$\begin{aligned} k_n &= L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \sum_{i,j=1}^2 (\mathbf{U}, \mathbf{U}_i) (\mathbf{U}, \mathbf{U}_j) L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j) \\ &= [(\mathbf{U}, \mathbf{U}_1)]^2 L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1) + [(\mathbf{U}, \mathbf{U}_2)]^2 L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_2) \\ &= [(\mathbf{U}, \mathbf{U}_1)]^2 \lambda_1 + [(\mathbf{U}, \mathbf{U}_2)]^2 \lambda_2. \end{aligned}$$

■

Wird auf die Eigenwertgleichung (4.25) von links  $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1}$  angewendet, so entsteht ein einfaches Eigenwertproblem mit der Gleichung:

$$(\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{X}} - \lambda \mathbf{I}) \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Größen  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $(U_k^1, U_k^2)^T$  ( $k = 1, 2$ ) können deshalb auch als Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{X}}$  angesehen werden. Mit Formel (4.20) erhält man

$$W_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_k) - \lambda_k \mathbf{U}_k = (L_{im} G^{mj} - \lambda_k \delta_i^j) U_k^i \mathbf{T}_j = (L_{im} - \lambda_k G_{im}) G^{mj} U_k^i \mathbf{T}_j = \mathbf{0}.$$

Dabei wurde beachtet, dass gemäß der Eigenwertgleichung (4.25) und wegen der Symmetrie von  $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}$  und  $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}$  gilt:  $(L_{im} - \lambda_k G_{im}) U_k^i = 0$  ( $m, k = 1, 2$ ). Dieses Ergebnis ist wie folgt zu interpretieren: Die Hauptkrümmungen  $\lambda_1, \lambda_2$  und Hauptkrümmungsrichtungen  $\mathbf{U}_k = U_k^i \mathbf{T}_i$  ( $k = 1, 2$ ) sind die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der WEINGARTEN-Abbildung.

**Bemerkung 4.21** In der linearen Algebra werden die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\bar{\mathbf{A}}$  ähnlich genannt, wenn eine reguläre Matrix  $\mathbf{C}$  existiert und  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$  ist (siehe [MeVa], Bd. 1, S. 325). Wegen

$$(\bar{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I})\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C})\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C}\bar{\mathbf{u}}$$

sind die beiden Gleichungen

$$(\bar{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I})\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{u} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{u}}$$

für die gleichen  $\lambda$ -Werte erfüllt. Zueinander ähnliche Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\bar{\mathbf{A}}$  besitzen deshalb die gleichen Eigenwerte. Man sagt, die Eigenwerte einer quadratischen Matrix  $\mathbf{A}$  sind invariant (bleiben unverändert) gegenüber Ähnlichkeitstransformationen mit einer regulären Matrix  $\mathbf{C}$ . Sind auf der Fläche  $(\mathbf{f})$  mit  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  und  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}})$  zwei reguläre Parametrisierungen bekannt, die über eine Parametertransformation mit der regulären Matrix  $\mathbf{C} = \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\mathbf{u}}}$  (siehe Def. 4.2) verbunden sind, so stehen die Fundamentalgrößen beider Parametrisierungen in der folgenden Beziehung zueinander (siehe Bemerkungen 4.10 und 4.16):

$$\bar{\mathbf{G}}_{\mathbf{X}} = \mathbf{C}^T\mathbf{G}_{\mathbf{X}}\mathbf{C} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{L}}_{\mathbf{X}} = \pm\mathbf{C}^T\mathbf{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{C}.$$

Daraus resultiert (bis auf das Vorzeichen) die Ähnlichkeitstransformation

$$\overline{\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{X}}} = \pm\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{X}})\mathbf{C}.$$

Das Minuszeichen ist zu nehmen, wenn es sich um eine nicht orientierungstreue Transformation handelt, d.h., wenn  $\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\mathbf{u}}}\right) < 0$ . Die Eigenwerte bzw. die Hauptkrümmungen  $\lambda_1, \lambda_2$  der Matrix  $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{X}}$  sind folglich invariant unter regulären orientierungserhaltenden Parametertransformationen. Die Hauptkrümmungen einer orientierten Fläche sind deshalb als Funktionen  $\lambda_i : \mathfrak{f} \rightarrow \mathbb{R}$  gemäß  $\mathbf{X} \in \mathfrak{f} \rightarrow \lambda_i(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) der Flächenpunkte anzusehen. Ist die Parametertransformation nicht orientierungstreu, so ändern die Eigenwerte ihr Vorzeichen ( $\lambda_i \rightarrow -\lambda_i$ ). Mit der Invarianz von  $\lambda_1, \lambda_2$  sind auch die Größen

$$\text{spur}(\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{X}}) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{X}}) = \lambda_1\lambda_2$$

Invarianten eines Flächenpunktes. Über diese beiden Kombinationen der Hauptkrümmungen sind weitere von der Parametrisierung unabhängige Aussagen über die Krümmung einer Fläche ableitbar.

**Definition 4.12** Die aus den Hauptkrümmungen  $\lambda_1(\mathbf{X}), \lambda_2(\mathbf{X})$  abgeleiteten Funktionen

$$\begin{aligned} H(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2}\text{spur}(\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{X}}) \quad \text{und} \\ K(\mathbf{X}) &= \lambda_1\lambda_2 = \det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{X}}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

heißen **mittlere Krümmung**  $H$  und **GAUßsche Krümmung**  $K$  der Fläche im Punkt  $\mathbf{X}$ .

**Bemerkung 4.22** Direkt aus dieser Definition ergeben sich für  $H$  und  $K$  die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \operatorname{spur} (\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2} (G^{11} L_{11} + 2G^{12} L_{12} + G^{22} L_{22}) \\ &= \frac{1}{2 \det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})} (G_{22} L_{11} - 2G_{12} L_{12} + G_{11} L_{22}) \\ K &= \det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{X}}) = \frac{\det(\mathbf{L}_{\mathbf{X}})}{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

$|H|$  und  $K$  sind invariant gegenüber beliebigen regulären Parametertransformationen. Bei nicht orientierungstreuen Transformationen ändert lediglich die mittlere Krümmung  $H$  das Vorzeichen.

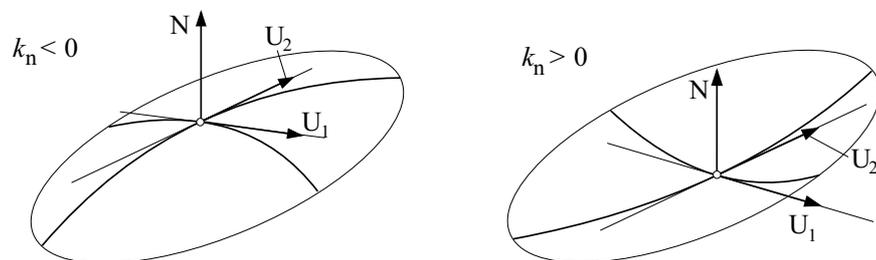
**Beispiel 4.14** Für eine Ebene ist  $\mathbf{L}_{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$  und damit  $H(\mathbf{X}) = K(\mathbf{X}) = 0$  in allen Ebenenpunkten  $\mathbf{X}$ .

Im Falle der Einheitskugel  $S^2$  ist  $\mathbf{G}_{\mathbf{X}} = \mathbf{L}_{\mathbf{X}}$  (siehe Beispiel 4.13) und folglich

$$K(\mathbf{X}) = 1 ; \quad H(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \operatorname{spur} (\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2} \operatorname{spur} (\mathbf{I}) = 1.$$

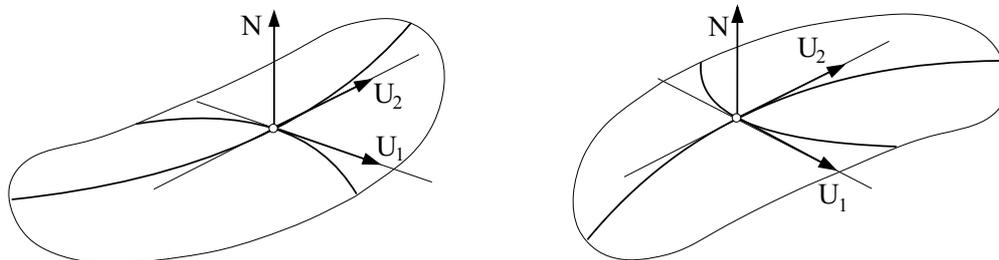
Mit der GAUßschen Krümmung  $K = \lambda_1 \lambda_2$  kann eine Klassifizierung von Flächenpunkten vorgenommen werden. Je nachdem, welches Vorzeichen  $K(\mathbf{X})$  in einem festen Flächenpunkt  $\mathbf{X}$  besitzt, ergeben sich folgende vier Fälle:

1.  $K(\mathbf{X}) > 0$  : Die Hauptkrümmungen  $\lambda_1, \lambda_2$  sind beide entweder positiv oder negativ und damit entweder  $k_n = L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) > 0$  oder  $k_n = L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) < 0$  für alle  $\mathbf{U} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  mit  $\|\mathbf{U}\| = 1$ . Dies bedeutet weiter, dass sich die Fläche in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $\mathbf{X}$  in jede Richtung  $\mathbf{U} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$  entweder zum Normalenvektor  $\mathbf{N}_{\mathbf{X}}$  hin ( $k_n > 0$ ) oder von diesem weg biegt ( $k_n < 0$ ) (siehe Abb. 4.14). Damit nimmt die Fläche lokal (in einer kleinen Umgebung von  $\mathbf{X}$ ) die Form eines elliptischen Paraboloids mit dem Scheitel im Punkt  $\mathbf{X}$  an. Man nennt deshalb diese Flächenpunkte **elliptisch**.

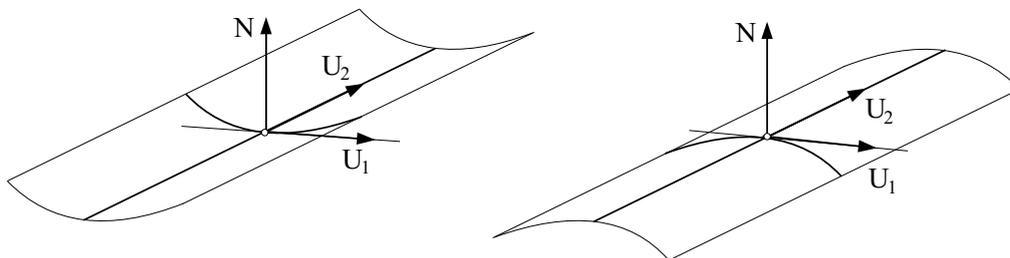


2.  $K(\mathbf{X}) < 0$  : Die Hauptkrümmungen besitzen in diesem Fall verschiedene Vorzeichen und  $k_n = L_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{U})$  nimmt sowohl positive als auch negative Werte an. Die Fläche ist dann in eine der beiden Hauptkrümmungsrichtungen zum Normalenvektor hin gekrümmt, während sie sich in die jeweils andere Hauptkrümmungsrichtung von  $\mathbf{N}_{\mathbf{X}}$  weg krümmt (siehe Abb. 4.15). Wieder bezogen auf

eine kleine Umgebung des Punktes  $\mathbf{X}$  sieht die Fläche wie ein hyperbolisches Paraboloid aus. Flächenpunkte dieser Art heißen **hyperbolisch**.



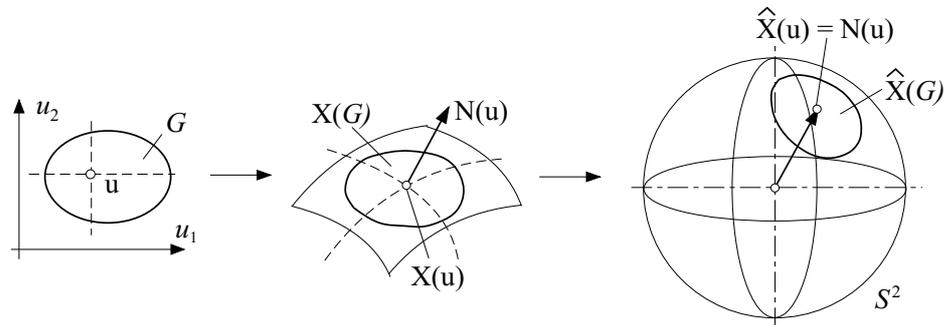
3.  $K(\mathbf{X}) = 0$  und  $\mathbf{L}_{\mathbf{X}} \neq \mathbf{0}$  : Unter diesen Bedingungen verschwindet genau eine der beiden Hauptkrümmungen, so dass in eine der zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen die Fläche nicht gekrümmt ist. Je nachdem, ob die von Null verschiedene Hauptkrümmung positiv oder negativ ist, liegt eine Flächenkrümmung in die entsprechende Hauptkrümmungsrichtung vor, die zur Normalenrichtung hin oder von ihr weg weist (siehe Abb. 4.16). In einer kleinen Umgebung des Punktes  $\mathbf{X}$  hat die Fläche damit die Form eines parabolischen Zylinders. Punkte mit dieser Charakteristik heißen **parabolisch**.



4.  $K(\mathbf{X}) = 0$  und  $\mathbf{L}_{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$  : In diesem Fall ist  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  und die Krümmung der Fläche verschwindet in jede Richtung  $\mathbf{U} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$ . Es liegt folglich ein Flachpunkt vor.

Die GAUßsche Krümmung und der damit verbundene Begriff der Totalkrümmung einer Fläche (integraler Wert über die GAUßschen Krümmungen) sind von zentraler Bedeutung für die globale Flächentheorie (siehe Abschnitt 4.12). Ein interessantes Zwischenresultat ist an dieser Stelle schon ableitbar und beinhaltet eine Aussage zur totalen Absolutkrümmung eines Flächenstückes, das sich auf der Grundlage der GAUß-Abbildung (siehe Definition 4.7) ergibt. Geht man von einer Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ) eines  $C^2$ -Flächenstückes aus, so wird durch die GAUß-Abbildung  $\hat{\mathbf{X}} : U \rightarrow S^2$  einer Teilmenge  $G \subset U$  eine Teilmenge  $\hat{\mathbf{X}}(G) \subset S^2$  zugeordnet (siehe

Abb. 4.17).



Ist  $K = K(\mathbf{X})$  die GAUßsche Krümmung im Flächenpunkt  $\mathbf{X}$ , so heißt die integrale Größe

$$\iint_G |K(\mathbf{X}(\mathbf{u}))| dF$$

mit dem Flächenelement  $dF = \sqrt{\det(\mathbf{G}_\mathbf{X})} du^1 du^2$  **totale Absolutkrümmung** des Flächenstückes  $\mathbf{X}(G)$ . Der Inhalt  $|\hat{\mathbf{X}}(G)|$  der Bildmenge  $\hat{\mathbf{X}}(G)$ , die sich bei der GAUß-Abbildung auf  $S^2$  ergibt, ist gleich dem Integral

$$|\hat{\mathbf{X}}(G)| = \iint_G d\hat{F}$$

mit dem Flächenelement  $d\hat{F} = \sqrt{\det(\hat{\mathbf{G}}_\mathbf{X})} du^1 du^2$  und der Fundamentalgröße  $\hat{\mathbf{G}}_\mathbf{X} = \hat{\mathbf{J}}_\mathbf{X}^T \cdot \hat{\mathbf{J}}_\mathbf{X} = \left\{ (\hat{\mathbf{X}}_{,i}, \hat{\mathbf{X}}_{,j}) \right\}$ .  $\hat{\mathbf{J}}_\mathbf{X} = \left\{ \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial u^j} \right\}$  ist die JACOBI-Matrix der GAUß-Abbildung  $\hat{\mathbf{X}}$ .

**Satz 4.2**  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ) sei eine reguläre Parametrisierung eines  $C^2$ -Flächenstückes und  $G \subset U$  eine beschränkte und abgeschlossene (d.h. kompakte) Menge im  $\mathbb{R}^2$ . Ist die GAUß-Abbildung  $\hat{\mathbf{X}} : U \rightarrow S^2$  injektiv und  $\text{rang}(\hat{\mathbf{J}}_\mathbf{X}(\mathbf{u})) = 2$  für alle  $\mathbf{u} \in G$ , so ist die totale Absolutkrümmung von  $\mathbf{X}(G)$  gleich dem Flächeninhalt von  $\hat{\mathbf{X}}(G) \subset S^2$ :

$$\iint_G |K(\mathbf{X}(\mathbf{u}))| dF = \iint_G d\hat{F}.$$

**Beweis.** Es genügt, einen Zusammenhang zwischen den Flächenelementen  $d\hat{F}$  und  $dF$  herzustellen. Wegen  $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{N}$  ist  $(\hat{\mathbf{X}}_{,i}, \hat{\mathbf{X}}_{,j}) = (\mathbf{N}_{,i}, \mathbf{N}_{,j})$ . Mit der Ableitungsgleichung

nach WEINGARTEN (4.18) und unter Beachtung der Symmetrie von  $\mathbf{G}_\mathbf{X}$  und  $\mathbf{L}_\mathbf{X}$  ergibt sich

$$\hat{\mathbf{G}}_\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{,1} \\ \mathbf{N}_{,2} \end{pmatrix} (\mathbf{N}_{,1} \quad \mathbf{N}_{,2}) = \mathbf{L}_\mathbf{X} \mathbf{G}_\mathbf{X}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2) \mathbf{G}_\mathbf{X}^{-1} \mathbf{L}_\mathbf{X} = \mathbf{L}_\mathbf{X} \mathbf{G}_\mathbf{X}^{-1} \mathbf{L}_\mathbf{X}.$$

Folglich ist

$$\det(\hat{\mathbf{G}}_\mathbf{X}) = \left( \frac{\det(\mathbf{L}_\mathbf{X})}{\det(\mathbf{G}_\mathbf{X})} \right)^2 \det(\mathbf{G}_\mathbf{X}) = K^2 \det(\mathbf{G}_\mathbf{X})$$

und weiter

$$d\hat{F} = \sqrt{\det(\hat{\mathbf{G}}_\mathbf{X})} du^1 du^2 = |K| \sqrt{\det(\mathbf{G}_\mathbf{X})} du^1 du^2 = |K| dF.$$

■

## 4.6. Ableitungsgleichungen

Die FRENETschen Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen den Vektoren des begleitenden Dreibeins einer Kurve und deren Ableitungen herstellen, bilden die Grundlage zur Rekonstruktion dieser Kurve. Auch Flächenstücke mit vorgegebenen Eigenschaften können über die Lösung eines Systems von partiellen Differenzialgleichungen erzeugt werden. Diese Gleichungen stellen einen Zusammenhang zwischen Flächen-Dreibeinen  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}$  und deren Ableitungen her und werden Ableitungsgleichungen der Flächentheorie genannt. Mit der Ableitungsgleichung nach WEINGARTEN (4.17) liegen diese Gleichungen für Ableitungen  $\mathbf{N}_{,i}$  des Einheitsnormalenfeldes  $\mathbf{N}$  schon vor. Herzustellen sind noch Beziehungen für die Ableitungen der Tangentenbasisvektoren  $\mathbf{T}_{i,j} = \mathbf{X}_{,ij}$ . Diese werden als Linearkombinationen der Vektoren  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}$  in der Form

$$\mathbf{X}_{,ij} = \Gamma_{ij}^1 \mathbf{T}_1 + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{T}_2 + L_{ij} \mathbf{N} \quad (4.28)$$

angesetzt und heißen **Ableitungsgleichungen nach GAUß**. Zunächst stellt man fest, dass wegen  $\mathbf{T}_i \perp \mathbf{N}$  und  $(\mathbf{X}_{,ij}, \mathbf{N}) = L_{ij} (\mathbf{N}, \mathbf{N}) = L_{ij}$  die Koeffizienten  $L_{ij}$  tatsächlich, wie durch die Bezeichnung schon ausgewiesen, die Koeffizienten der zweiten metrischen Fundamentalgröße  $\mathbf{L}_\mathbf{X}$  sein müssen. Zur Berechnung der Glieder  $\Gamma_{ij}^k$  werden die Skalarprodukte von (4.28) mit den Vektoren  $\mathbf{X}_{,k}$  gebildet und dabei beachtet, dass  $(\mathbf{X}_{,m}, \mathbf{X}_{,k}) = G_{mk}$  ist:

$$(\mathbf{X}_{,ij}, \mathbf{X}_{,k}) = \Gamma_{ij}^m G_{mk} \quad k = 1, 2. \quad (4.29)$$

Vertauscht man in den Ableitungen

$$G_{ij,k} = \frac{\partial}{\partial u^k} (\mathbf{X}_{,i}, \mathbf{X}_{,j}) = (\mathbf{X}_{,ik}, \mathbf{X}_{,j}) + (\mathbf{X}_{,i}, \mathbf{X}_{,jk}) \quad (4.30)$$

zyklisch die Indizes  $i, j, k$  und summiert anschließend die entstehenden Ausdrücke auf, so entsteht

$$\begin{array}{rcl} +G_{ki,j} & = & (\mathbf{X}_{,kj}, \mathbf{X}_{,i}) + (\mathbf{X}_{,k}, \mathbf{X}_{,ij}) \\ +G_{jk,i} & = & (\mathbf{X}_{,ji}, \mathbf{X}_{,k}) + (\mathbf{X}_{,j}, \mathbf{X}_{,ik}) \\ -G_{ij,k} & = & -(\mathbf{X}_{,ik}, \mathbf{X}_{,j}) - (\mathbf{X}_{,i}, \mathbf{X}_{,jk}) \\ \hline G_{ki,j} + G_{jk,i} - G_{ij,k} & = & 2(\mathbf{X}_{,ij}, \mathbf{X}_{,k}). \end{array}$$

Daraus ergibt sich zusammen mit  $\Gamma_{ij}^m G_{mk} G^{kl} = \Gamma_{ij}^m \delta_m^l = \Gamma_{ij}^l$  und (4.29):

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} G^{kl} (G_{ki,j} + G_{jk,i} - G_{ij,k}). \quad (4.31)$$

Die Größen  $\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ij}^l(u^1, u^2)$  werden **CHRISTOFFEL-Symbole** 2. Art genannt. Diese stehen über  $\Gamma_{ijm} = \Gamma_{ij}^l G_{lm}$  mit den CHRISTOFFEL-Symbolen 1. Art  $\Gamma_{ijm}$  in Beziehung.

**Bemerkung 4.23** Von Bedeutung ist, dass sich die CHRISTOFFEL-Symbole allein aus den Koeffizienten der 1. metrischen Fundamentalgröße  $\mathbf{G}_\mathbf{X}$  und deren Ableitungen berechnen lassen. Die Symbole  $\Gamma_{ij}^l$  sind in den unteren Indizes symmetrisch:

$$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l.$$

**Beispiel 4.15** Auf einer Ebene (siehe Beispiele 4.1 und 4.7) sind die Metrikkoeffizienten  $G_{ij}$  konstante Größen und folglich verschwinden sämtliche CHRISTOFFEL-Symbole, d.h.  $\Gamma_{ij}^k = 0$  für  $i, j, k = 1, 2$ .

**Beispiel 4.16** Für die Einheitssphäre  $S^2$  in der Parametrisierung gemäß (4.2) und den daraus folgenden Metrikkoeffizienten

$$G_{11} = \sin^2(u^2); \quad G_{22} = 1; \quad G_{12} = G_{21} = 0$$

erhält man als einzige von Null verschiedene CHRISTOFFEL-Symbole

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \cot(u^2) \quad \text{und} \quad \Gamma_{11}^2 = -\sin(u^2) \cos(u^2).$$

In zusammengefasster Form erlauben die Ableitungsgleichungen die Darstellung

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{1k}^1 & \Gamma_{1k}^2 & L_{1k} \\ \Gamma_{2k}^1 & \Gamma_{2k}^2 & L_{2k} \\ -L_k^1 & -L_k^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad k = 1, 2. \quad (4.32)$$

Dies ist ein System linearer partieller Differenzialgleichungen 1. Ordnung für die Funktionen  $\mathbf{T}_1(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{T}_2(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ .

Die Rekonstruktion der Parametrisierung  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$  einer Fläche kann bei bekannten Fundamentalgrößen  $\mathbf{G}_\mathbf{X}(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{L}_\mathbf{X}(\mathbf{u})$  in der Umgebung eines Flächenpunktes  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{u}_0)$  mit dem begleitenden Dreibein  $\mathbf{T}_{10}, \mathbf{T}_{20}, \mathbf{N}_0$  in groben Zügen wie folgt beschrieben werden:

- Die Koeffizienten  $\Gamma_{jk}^i$  und  $L_{ik}$  des Systems (4.32) ergeben sich unmittelbar aus den Koeffizienten von  $\mathbf{G}_\mathbf{X}$  und  $\mathbf{L}_\mathbf{X}$ . Über die Lösung von (4.32) mit den Anfangswerten  $\mathbf{T}_i(\mathbf{u}_0) = \mathbf{T}_{i0}$ ,  $\mathbf{N}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{N}_0$  erhält man die Funktionen  $\mathbf{T}_i(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  in einer Umgebung des Flächenpunktes  $\mathbf{X}_0$ .
- Mit dem Zusammenhang  $\mathbf{X}_{,i} = \mathbf{T}_i$  und den Anfangsbedingungen  $\mathbf{X}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{X}_0$  liegt

ebenfalls ein Anfangswertproblem für ein Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung vor, dessen Lösung die angestrebte Parametrisierung liefert.

In beiden Teilaufgaben muss die Lösung eines Anfangswertproblems für ein System partieller Differenzialgleichungen 1. Ordnung gesichert sein. Mit Bezug auf das System (4.32) liefert der folgende Satz dazu eine Aussage.

**Satz 4.3 (Satz von FROBENIUS)**

In der offenen Menge  $U_0 \subset \mathbb{R}^2$  seien die Funktionen  $B_{ij}^{(k)} : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, 2$  stetig differenzierbar. Mit diesen Funktionen werden die Matrizen  $\mathbf{B}_k(\mathbf{u}) = \{B_{ij}^{(k)}(\mathbf{u})\}$  und deren Ableitungen  $\mathbf{B}_{k,l}(\mathbf{u}) = \left\{ \frac{\partial B_{ij}^{(k)}(\mathbf{u})}{\partial u^l} \right\}$  ( $l = 1, 2$ ) gebildet. Das Anfangswertproblem

$$\mathbf{Y}_{,k}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_k(\mathbf{u}) \mathbf{Y}(\mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{Y}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{Y}_0 \quad (4.33)$$

besitzt genau dann in einer offenen Menge  $U \subset U_0$  mit  $\mathbf{u}_0 \in U$  eine eindeutig bestimmte zweimal stetig differenzierbare Lösung  $\mathbf{Y}(\mathbf{u}) = (Y_1(\mathbf{u}), \dots, Y_n(\mathbf{u}))^T$ , wenn die **Integrabilitätsbedingungen**

$$\mathbf{B}_{k,l}(\mathbf{u}) + \mathbf{B}_k(\mathbf{u}) \mathbf{B}_l(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_{l,k}(\mathbf{u}) + \mathbf{B}_l(\mathbf{u}) \mathbf{B}_k(\mathbf{u}) \quad (4.34)$$

für alle  $\mathbf{u} \in U_0$  erfüllt sind.

**Beweis.** Es soll hier nur die Notwendigkeit der Bedingung (4.34) gezeigt werden.

$\mathbf{Y}(\mathbf{u})$  sei für alle  $\mathbf{u} \in U$  eine zweimal stetig differenzierbare Lösung von (4.33). Durch Ableitung von  $\mathbf{Y}_{,k} = \mathbf{B}_k \mathbf{Y}$  nach  $u^l$  erhält man:

$$\mathbf{Y}_{,kl} = \mathbf{B}_{k,l} \mathbf{Y} + \mathbf{B}_k \mathbf{Y}_{,l} = \mathbf{B}_{k,l} \mathbf{Y} + \mathbf{B}_k \mathbf{B}_l \mathbf{Y} = (\mathbf{B}_{k,l} + \mathbf{B}_k \mathbf{B}_l) \mathbf{Y}$$

und analog durch Ableitung von  $\mathbf{Y}_{,l} = \mathbf{B}_l \mathbf{Y}$  nach  $u^k$ :  $\mathbf{Y}_{,lk} = (\mathbf{B}_{l,k} + \mathbf{B}_l \mathbf{B}_k) \mathbf{Y}$ . Nach dem Satz von SCHWARZ über die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen ist  $\mathbf{Y}_{,kl} = \mathbf{Y}_{,lk}$ , womit auch die Gültigkeit der Integrabilitätsbedingungen (4.34) für  $k, l = 1, 2$  gezeigt ist. ■

Die Ableitungsgleichungen in der Darstellung (4.32) zusammen mit den Anfangsbedingungen  $\mathbf{T}_i(\mathbf{u}_0) = \mathbf{T}_{i0}$  und  $\mathbf{N}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{N}_0$  können mit den Matrizen

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{10} \\ \mathbf{T}_{20} \\ \mathbf{N}_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} \Gamma_{1k}^1 & \Gamma_{1k}^2 & L_{1k} \\ \Gamma_{2k}^1 & \Gamma_{2k}^2 & L_{2k} \\ -L_k^1 & -L_k^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

als Anfangswertproblem der Form (4.33) geschrieben werden. Die Voraussetzungen des Satzes von FROBENIUS sind erfüllt, wenn in einer offenen Menge  $U_0 \subset \mathbb{R}^2$

( $\mathbf{u}_0 \in U_0$ ) die Metrikkoeffizienten  $G_{ij}(\mathbf{u})$  zweimal und  $L_{ij}(\mathbf{u})$  einmal stetig differenzierbar sind (die CHRISTOFFEL-Symbole  $\Gamma_{ij}^k(\mathbf{u})$  sind dann auch stetig differenzierbar) und die Matrizen  $\mathbf{B}_k$  aus (4.35) die Integrabilitätsbedingungen (4.34) erfüllen. Nach einfachen Umformungen entstehen aus (4.34) zwei Gleichungen, die man als Integrabilitätsbedingungen der Flächentheorie bezeichnet.

**Satz 4.4** Die Integrabilitätsbedingungen (4.34) mit der Matrix  $\mathbf{B}_k$  aus (4.35) sind äquivalent zu den folgenden Gleichungen:

**Gleichung von GAUß**

$$\Gamma_{jk,l}^m - \Gamma_{jl,k}^m + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{sl}^m - \Gamma_{jl}^s \Gamma_{sk}^m = (L_{jk}L_{ls} - L_{jl}L_{ks}) G^{sm} \quad j, k, l, m = 1, 2 \quad (4.36)$$

**Gleichung von CODAZZI-MAINARDI**

$$L_{ij,k} - L_{ik,j} + \Gamma_{ij}^s L_{sk} - \Gamma_{ik}^s L_{sj} = 0 \quad i, j, k = 1, 2. \quad (4.37)$$

Die Herleitung dieser Gleichungen ist Gegenstand der Aufgabe 8 aus Abschnitt 4.13.

**Bemerkung 4.24** Sind die Gleichungen (4.36) und (4.37) für alle  $\mathbf{u}_0 \in U_0$  erfüllt, so ist die Vertauschbarkeit zweiter partieller Ableitungen der Lösungsfunktionen  $\mathbf{T}_i(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  der Anfangswertaufgabe für alle  $\mathbf{u} \in U \subset U_0$  gewährleistet. Wegen  $\mathbf{T}_i = \mathbf{X}_{,i}$  muss damit die angestrebte Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  des zu rekonstruierenden Flächenstückes wenigstens dreimal stetig differenzierbar sein. Die Gültigkeit der Gleichungen (4.36) und (4.37) ist damit äquivalent zur Vertauschbarkeit auch dritter partieller Ableitungen von  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$ :

$$\mathbf{X}_{,ijk}(\mathbf{u}) = \mathbf{X}_{,ikj}(\mathbf{u}) \quad \text{und} \quad \mathbf{N}_{,jk}(\mathbf{u}) = \mathbf{N}_{,kj}(\mathbf{u}) \quad \text{für alle } \mathbf{u} \in U \quad \text{und } i, j, k = 1, 2.$$

**Bemerkung 4.25** Die Ausdrücke

$$R_{jkl}^m = \Gamma_{jk,l}^m - \Gamma_{jl,k}^m + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{sl}^m - \Gamma_{jl}^s \Gamma_{sk}^m \quad j, k, l, m = 1, 2 \quad (4.38)$$

sind die Koordinaten des **RIEMANNschen Krümmungstensors**. In einer auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten aufbauenden Theorie gekrümmter Räume kommt diesem Tensor eine fundamentale Rolle zu. Mit den (kovarianten) Koordinaten  $R_{ijkl} = G_{im} R_{jkl}^m$  nimmt die Gleichung von GAUß die häufig verwendete Form

$$R_{ijkl} = L_{jk}L_{li} - L_{jl}L_{ki}. \quad (4.39)$$

an. Aus den Gleichungen (4.36) und (4.37) ist ersichtlich, dass die Fundamentalgrößen  $\mathbf{G}_\mathbf{X}$  und  $\mathbf{L}_\mathbf{X}$  über die aus den Metrikkoeffizienten und deren Ableitungen folgenden CHRISTOFFEL-Symbole gerade in dieser Weise miteinander verbunden sind.

**Bemerkung 4.26** Aus den Beziehungen (4.39) sind die Symmetrieeigenschaften der Koordinaten  $R_{ijkl}$  des Krümmungstensors erkennbar. Unter Beachtung von  $L_{ij} = L_{ji}$  ergibt sich

$$R_{ijkl} = R_{klij} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}.$$

Für  $i = j$  und  $k = l$  verschwinden folglich die Koordinaten  $R_{ijkl}$ . Da für (zweidimensionale) Flächen die Indizes nur die Werte 1 und 2 annehmen, folgt, dass die Koordinaten des Krümmungstensors in diesem Fall schon durch einen Wert

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221}$$

bestimmt sind.

Ein Anlass zur Definition der ersten metrischen Fundamentalform im Abschnitt 4.3 war die Einführung eines spezifischen flächeneigenen Maßes. Dieses Maß ist z.B. aus Messungen infinitesimaler Längen  $ds_i$  auf den Koordinatenlinien  $\mathbf{c}_i$  und der Winkel  $\gamma$ , die zwischen sich schneidenden Koordinatenlinien bestehen, ableitbar. Zwischen diesen Messgrößen und den Metrikoeffizienten bestehen die Zusammenhänge:

$$ds_i = \sqrt{G_{ii}} dt ; \quad \cos(\gamma) = \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}G_{22}}}.$$

Die metrische Fundamentalgröße  $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}$  ist deshalb für jeden Flächenpunkt  $\mathbf{X}$  durch direkte Messungen auf einer Fläche bestimmbar. Für diese Messungen ist es unerheblich, wie die Fläche in den umgebenden Raum eingebettet ist. Die Metrikoeffizienten und alle aus diesen abgeleiteten Größen tragen deshalb für eine bestimmte Fläche einen individuellen (innergeometrischen) Charakter. Man spricht im Zusammenhang mit Analysen einer Fläche bei ausschließlichem Bezug zur ersten metrischen Fundamentalgröße von der **inneren Geometrie** der Fläche.

**Definition 4.13** Eine allgemein tensorielle Größe  $\kappa(\mathbf{X})$ , die eine Funktion der Flächenpunkte  $\mathbf{X}$  einer Fläche  $(\mathbf{f})$  mit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ist und ausschließlich von der ersten metrischen Fundamentalgröße  $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$  und deren Ableitungen abhängt, heißt **innergeometrische Größe** der Fläche  $(\mathbf{f})$ .

Die CHRISTOFFEL-Symbole (4.31) und der Krümmungstensor mit den Koordinaten (4.38) gehören zu den innergeometrischen Größen einer Fläche. Der innergeometrische Charakter einer Größe ist nicht immer sofort erkennbar. Die GAUßsche Krümmung  $K$  scheint gemäß Formel (4.27) nicht innergeometrisch zu sein. Als Überraschung muss man deshalb die Aussage des folgenden auf GAUß zurückgehenden Satzes ansehen.

**Satz 4.5 (Theorema egregium)**

Die GAUßsche Krümmung ist eine innergeometrische Größe und es gilt

$$K(\mathbf{X}) = \frac{R_{1221}(\mathbf{X})}{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})}.$$

**Beweis.** Setzt man in der Beziehung (4.39)  $i = l = 1$  und  $j = k = 2$ , so entsteht

$$R_{1221} = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} = \det(\mathbf{L}_{\mathbf{X}}).$$

Aus Formel (4.27) folgt dann

$$K(\mathbf{X}) = \frac{\det(\mathbf{L}_{\mathbf{X}})}{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})} = \frac{R_{1221}(\mathbf{X})}{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})}.$$

■

**Bemerkung 4.27** Das Theorema egregium gehört zu den bedeutendsten Aussagen der Differenzialgeometrie. Eine der vielseitigen Konsequenzen aus diesem Satz ist, dass die Krümmung einer Fläche nicht von ihrer Einbettung im Raum abhängt.

## 4.7. Hauptsatz der Flächentheorie

In Analogie zum Hauptsatz der Kurventheorie (siehe Abschnitt 3.5) können auch für Flächen Bedingungen angegeben werden, unter denen eine Fläche eindeutig bzw. bis auf EUKLIDISCHE Bewegungen eindeutig bestimmt ist.

**Satz 4.6 (Hauptsatz der Flächentheorie)**

Auf einer offenen Menge  $U_0 \subset \mathbb{R}^2$  seien die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $G_{ij} : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  und die lediglich stetig differenzierbaren Funktionen  $L_{ij} : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i, j = 1, 2$ ) definiert und erfüllen folgende Voraussetzungen:

V1: Die Matrizen

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} G_{11}(\mathbf{u}) & G_{12}(\mathbf{u}) \\ G_{21}(\mathbf{u}) & G_{22}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{L}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} L_{11}(\mathbf{u}) & L_{12}(\mathbf{u}) \\ L_{21}(\mathbf{u}) & L_{22}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

sind für alle  $\mathbf{u} \in U_0$  symmetrisch und  $\mathbf{G}(\mathbf{u})$  außerdem positiv definit.

V2:  $G_{ij}(\mathbf{u})$ ,  $L_{ij}(\mathbf{u})$  und die aus  $G_{ij}(\mathbf{u})$  gemäß (4.31) hervorgehenden CHRISTOFFEL-Symbole  $\Gamma_{ij}^l(\mathbf{u})$  erfüllen die Gleichungen von GAUß (4.36) und CODAZZI-MAINARDI (4.37).

Weiterhin werden einem Raumpunkt  $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^3$  als Anfangswerte Vektoren  $\mathbf{T}_{10}, \mathbf{T}_{20}, \mathbf{N}_0 \in \mathbb{R}^3$  zugeordnet, für die folgendes gilt:

V3:  $(\mathbf{T}_{i0}, \mathbf{T}_{j0}) = G_{ij}(\mathbf{u}_0)$  ( $i, j = 1, 2$ ) für einen festen Punkt  $\mathbf{u}_0 = (u_0^1, u_0^2) \in U_0$ .

V4:

$$\mathbf{N}_0 = \frac{\mathbf{T}_{10} \times \mathbf{T}_{20}}{\|\mathbf{T}_{10} \times \mathbf{T}_{20}\|}.$$

Dann existiert auf einer offenen zusammenhängenden Teilmenge  $U \subset U_0$  mit  $\mathbf{u}_0 \in U$  genau ein  $C^3$ -Flächenstück mit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ) und dem Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ , wobei folgendes gilt:

E1:  $\mathbf{X}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{X}_0$ ;  $\mathbf{X}_{,i}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{T}_{i0}$  ( $i = 1, 2$ ) und  $\mathbf{N}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{N}_0$

E2: Die Matrizen  $\mathbf{G}(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{L}(\mathbf{u})$  sind die erste und zweite metrische Fundamentalgröße des Flächenstückes in den Flächenpunkten  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ).

### Beweis.

a) Die Matrizen  $\mathbf{B}_k(\mathbf{u})$  aus (4.35) werden mit den vorgegebenen Funktionen  $G_{ij}(\mathbf{u})$  und  $L_{ij}(\mathbf{u})$  aktualisiert. Zusammen mit den Anfangswerten  $\mathbf{T}_{i0}, \mathbf{N}_0$  bilden die Ableitungsgleichungen (4.32) ein Anfangswertproblem der Form (4.33), welches mit den Voraussetzungen V1-V4 nach dem Satz von FROBENIUS eindeutig bestimmte zweimal stetig differenzierbare Lösungsfunktionen  $\mathbf{T}_1(\mathbf{u}), \mathbf{T}_2(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  besitzt. Es ist noch zu zeigen, dass diese Vektorfunktionen für jeden Parameterwert  $\mathbf{u} \in U$  ein begleitendes Dreibein bilden, d.h. die Bedingungen

$$(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 1; \quad (\mathbf{N}, \mathbf{T}_i) = 0 \quad \text{und} \quad (\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j) = G_{ij} \quad ij = 1, 2 \quad (4.40)$$

erfüllen. Mit den Anfangsbedingungen V3 und V4 ist dies zumindest für  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  der Fall. Die jeweils linken Seiten der Gleichungen (4.40) sind mit  $\mathbf{T}_i(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  ebenfalls zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Durch Ableitung dieser Funktionen und mehrfache Verwendung der Gleichungen (4.28), (4.32) entstehen folgende Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^k} (\mathbf{N}, \mathbf{N}) &= 2(\mathbf{N}_{,k}, \mathbf{N}) = -2L_k^i(\mathbf{T}_i, \mathbf{N}) \\ \frac{\partial}{\partial u^k} (\mathbf{N}, \mathbf{T}_j) &= (\mathbf{N}_{,k}, \mathbf{T}_j) + (\mathbf{N}, \mathbf{T}_{j,k}) = -L_k^i(\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j) + \Gamma_{kj}^l(\mathbf{N}, \mathbf{T}_l) + L_{kj}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \\ \frac{\partial}{\partial u^k} (\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j) &= \Gamma_{ik}^l(\mathbf{T}_l, \mathbf{T}_j) + \Gamma_{jk}^l(\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_l) + L_{ik}(\mathbf{N}, \mathbf{T}_j) + L_{jk}(\mathbf{N}, \mathbf{T}_i) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Diese Gleichungen können als Anfangswertproblem der Form (4.33) für eine Vektorfunktion  $\mathbf{Y}(\mathbf{u}) = (Y_1(\mathbf{u}), \dots, Y_6(\mathbf{u}))^T$  mit den Anfangswerten  $\mathbf{Y}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{Y}_0 = (1, 0, 0, G_{11}(\mathbf{u}_0), G_{12}(\mathbf{u}_0), G_{22}(\mathbf{u}_0))^T$  geschrieben werden, wobei sich die Matrix  $\mathbf{B}_k(\mathbf{u})$  aus den Koeffizienten  $G_{ij}, \Gamma_{ij}^l$  und  $L_{ij}$  ergibt, die in (4.41) enthalten sind. Nach Konstruktion besitzt dieses Anfangswertproblem die Lösung

$$\mathbf{Y}_1 = ((\mathbf{N}, \mathbf{N}), (\mathbf{N}, \mathbf{T}_1), (\mathbf{N}, \mathbf{T}_2), (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1), (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2), (\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2))^T.$$

Unter Einbeziehung der Formeln (4.17) und (4.30) überprüft man, dass auch

$$\mathbf{Y}_2 = (1, 0, 0, G_{11}(\mathbf{u}), G_{12}(\mathbf{u}), G_{22}(\mathbf{u}))^T$$

dieses Problem löst. Beide Lösungen sind für alle  $\mathbf{u} \in U$  zweimal stetig differenzierbar, so dass nach dem Satz von SCHWARZ  $\mathbf{Y}_{k,ij} = \mathbf{Y}_{k,ji}$  gilt, womit weiter die Integrabilitätsbedingungen dieses Anfangswertproblems erfüllt sind. Diese Bedingungen sichern aber nach dem Satz von FROBENIUS die Eindeutigkeit der Lösung. Es ist deshalb  $\mathbf{Y}_1(\mathbf{u}) = \mathbf{Y}_2(\mathbf{u})$  für alle  $\mathbf{u} \in U$  und damit sind auch die Bedingungen (4.40) erfüllt.

b) Die Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ist Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathbf{X}_{,i}(\mathbf{u}) = \mathbf{T}_i(\mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{X}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{X}_0.$$

Aus den Ableitungsgleichungen nach GAUß (4.28) folgt mit den Symmetrien  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  und  $L_{ij} = L_{ji}$  die Erfüllung der Integrabilitätsbedingungen  $\mathbf{X}_{,ij} = \mathbf{X}_{,ji}$ . Damit existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$ . Zu zeigen ist noch, dass die Matrizen  $\mathbf{G}(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{L}(\mathbf{u})$  die metrischen Fundamentalgrößen dieser Flächenparametrisierung sind. Mit  $\mathbf{X}_{,i} = \mathbf{T}_i$  und Formel (4.40)<sub>3</sub> ist dies für  $\mathbf{G}(\mathbf{u})$  der Fall. Mit der Ableitungsgleichung nach GAUß (4.28) und den Beziehungen (4.40)<sub>1</sub>, (4.40)<sub>2</sub> ergibt sich

$$(\mathbf{X}_{,ij}, \mathbf{N}) = (\Gamma_{ij}^k \mathbf{T}_k + L_{ij} \mathbf{N}, \mathbf{N}) = L_{ij} (\mathbf{N}, \mathbf{N}) = L_{ij},$$

womit der Zusammenhang (4.16) zu den Koeffizienten der zweiten metrischen Fundamentalform  $\mathbf{L}(\mathbf{u})$  hergestellt ist. ■

**Bemerkung 4.28** *Unterwirft man die Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  eines Flächenstückes  $(\mathbf{f})$  einer orientierungstreu en EUKLIDischen Bewegung  $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \mathbf{Q}\mathbf{X}(\mathbf{u}) + \mathbf{b}$  mit der orthogonalen Matrix  $\mathbf{Q}$  ( $\det(\mathbf{Q}) = 1$ ) und einem festen Vektor  $\mathbf{b}$ , so ist  $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$  die Parametrisierung eines Flächenstückes  $(\bar{\mathbf{f}})$ . Beide Flächenstücke besitzen in den entsprechenden Parametrisierungen die gleichen metrischen Fundamentalgrößen  $\bar{\mathbf{G}}_{\bar{\mathbf{X}}}(\mathbf{u}) = \mathbf{G}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$  und  $\bar{\mathbf{L}}_{\bar{\mathbf{X}}}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$ . Zwischen den Vektoren der begleitenden Dreibeine bestehen die Beziehungen*

$$\bar{\mathbf{T}}_i = \mathbf{Q}\mathbf{T}_i \quad i = 1, 2 \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{N}} = \mathbf{Q}\mathbf{N}.$$

*Verzichtet man im Hauptsatz der Flächentheorie auf die Vorgabe des Stützvektors  $\mathbf{X}_0$  und des begleitenden Dreibeins  $\mathbf{T}_{10}, \mathbf{T}_{20}, \mathbf{N}_0$  in  $\mathbf{X}_0$ , so erhält man als Lösung eine Schar von Flächen, die alle die gleichen Fundamentalgrößen  $\mathbf{G}(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{L}(\mathbf{u})$  besitzen und über EUKLIDische Bewegungen aufeinander abgebildet werden können. Der Nachweis dieser Aussagen ist analog zu den entsprechenden Aussagen für Kurven in Bemerkung 3.5 zu führen.*

**Bemerkung 4.29** *Es wird deutlich darauf hingewiesen, dass die Vorgabe einer beliebigen symmetrischen positiv definiten Matrix  $\mathbf{G}(\mathbf{u})$  und einer beliebigen symmetrischen Matrix  $\mathbf{L}(\mathbf{u})$  nicht zwangsläufig ein Flächenstück definieren. Nur in dem Fall, wenn beide Matrizen über die Integrabilitätsbedingungen miteinander verknüpft sind (wie im Hauptsatz gefordert), ergibt sich ein Flächenstück mit eben diesen Fundamentalgrößen.*

## 4.8. Geodäten

Die Krümmung einer Kurve innerhalb einer Fläche wird nach den Betrachtungen zu Beginn des Abschnittes 4.5 durch die geodätische Krümmung  $k_g$  beschrieben. Nur dieser Teil der räumlichen Gesamtkrümmung einer Kurve nimmt ein Flachländer als Krümmung einer für ihn ebenen Kurve wahr. Verschwindet  $k_g$  längs eines Kurvenstückes, so wähnt er sich entlang einer "Geraden" zu bewegen. Diese Flächenkurven mit verschwindender geodätischer Krümmung, um die es in diesem Abschnitt geht, nennt man Geodäten einer Fläche.

Auf einem Flächenstück  $(\mathbf{f})$  mit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ) verlaufe eine Flächenkurve mit der Parametrisierung  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(t))$ . Ist  $t = s$  der Bogenlängenparameter, so ergibt sich nach (4.23) für die geodätische Krümmung  $k_g = [\mathbf{N}, \mathbf{x}', \mathbf{x}']$ . Zur Herleitung einer Formel für  $k_g$  bei freier Kurvenparametrisierung nach  $t$  sind die Ausdrücke (3.4) und (3.5) für  $\mathbf{x}'$  und  $\mathbf{x}''$  in  $[\mathbf{N}, \mathbf{x}', \mathbf{x}''] = (\mathbf{N}, \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')$  zu substituieren. Zunächst ist mit der GRASSMANN-Identität (2.1) und unter Beachtung von  $\dot{\mathbf{x}} \perp \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' &= \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}\|^5} (\dot{\mathbf{x}} \times [(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \dot{\mathbf{x}}]) \\ &= \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}\|^5} (\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) - (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}\|^3} \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für die geodätische Krümmung bei freier Parametrisierung:

$$k_g(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}\|^3} [\mathbf{N}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]. \quad (4.42)$$

Die geodätische Krümmung, die für Flächenbewohner in direkter Weise beobachtbar ist, sollte eine innergeometrische Größe sein. Der folgende Satz gibt die Bestätigung dafür.

**Satz 4.7** Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(t))$  ( $\mathbf{u}(t) \in U$ ) ist allein aus der ersten metrischen Fundamentalgröße  $\mathbf{G}_\mathbf{x}$  und den daraus folgenden CHRISTOFFEL-Symbolen  $\Gamma_{ij}^k$  gemäß

$$k_g = \frac{\sqrt{\det(\mathbf{G}_\mathbf{x})}}{[\mathbf{G}_\mathbf{x}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})]^{3/2}} [(\ddot{u}^2 + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^2) \dot{u}^1 - (\ddot{u}^1 + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^1) \dot{u}^2] \quad (4.43)$$

berechenbar und damit eine innergeometrische Größe.

**Beweis.** Über die Kettenregel der Differenziation werden die erste und zweite Ableitung der Kurve  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(t))$  gebildet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_{,l} \dot{u}^l \quad ; \quad \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_{,ij} \dot{u}^i \dot{u}^j + \mathbf{X}_{,k} \ddot{u}^k.$$

Mit der Ableitungsgleichung nach GAUß (4.28) ergibt sich für  $\ddot{\mathbf{x}}$ :

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k) \mathbf{X}_{,k} + L_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \mathbf{N}.$$

Wegen  $[\mathbf{N}, \mathbf{X}_{,l}, \mathbf{N}] = 0$  ist

$$[\mathbf{N}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}] = \dot{u}^l (\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k) [\mathbf{N}, \mathbf{X}_{,l}, \mathbf{X}_{,k}].$$

Unter Beachtung von  $\mathbf{X}_{,k} \times \mathbf{X}_{,k} = 0$  und

$$[\mathbf{N}, \mathbf{X}_{,1}, \mathbf{X}_{,2}] = \frac{(\mathbf{X}_{,1} \times \mathbf{X}_{,2}, \mathbf{X}_{,1} \times \mathbf{X}_{,2})}{\|\mathbf{X}_{,1} \times \mathbf{X}_{,2}\|} = \|\mathbf{X}_{,1} \times \mathbf{X}_{,2}\| = \sqrt{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})}$$

(Dabei wurde die LAGRANGEsche Identität (2.2) benutzt!) folgt weiter

$$[\mathbf{N}, \mathbf{X}_{,l}, \mathbf{X}_{,k}] = \begin{cases} 0 & \text{für } l = k \\ \pm \sqrt{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})} & \text{für } l \leq k \end{cases} \quad l, k = 1, 2.$$

Schließlich ist

$$\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = (\mathbf{X}_{,i} \mathbf{X}_{,j}) \dot{u}^i \dot{u}^j = G_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = \mathbf{G}_{\mathbf{X}}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}).$$

Werden die Ausdrücke für  $\|\dot{\mathbf{x}}\|^2$ ,  $[\mathbf{N}, \mathbf{X}_{,l}, \mathbf{X}_{,k}]$  und  $[\mathbf{N}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]$  in (4.42) substituiert, so entsteht die Formel (4.43) der geodätischen Krümmung. ■

**Definition 4.14** Eine Flächenkurve  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(t))$  ( $t \in I$  und  $\mathbf{u}(t) \in U$ ) wird **geodätische Linie** oder **Geodäte** genannt, wenn ihre geodätische Krümmung in jedem Kurvenpunkt verschwindet, d.h. wenn  $k_g(t) = 0$  für alle  $t \in I$ .

**Bemerkung 4.30** Die Flächenkurve  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(s))$  sei o.B.d.A. nach der Bogenlänge  $s$  parametrisiert und habe den Hauptnormalenvektor  $\mathbf{n}(s)$ .  $\mathbf{x}(s)$  ist genau dann eine Geodäte, wenn sich in jedem Kurvenpunkt der Flächennormalenvektor  $\mathbf{N}(\mathbf{u}(s))$  und der Hauptnormalenvektor  $\mathbf{n}(s)$  nur um ihr Vorzeichen unterscheiden, d.h. wenn

$$\mathbf{n}(s) = \pm \mathbf{N}(\mathbf{u}(s)).$$

Man kann diesen Sachverhalt auch wie folgt ausdrücken: Eine Flächenkurve  $\mathbf{x}(s)$  ist genau dann Geodäte, wenn die Flächennormale  $\mathbf{N}$  in jedem Kurvenpunkt in der von  $\mathbf{n}(s)$  und  $\mathbf{t}(s)$  aufgespannten Schmiegebene zu  $\mathbf{x}(s)$  sich befindet.

**Beweis.** a)  $\mathbf{x}(s)$  sei eine Geodäte und damit  $k_g(s) = 0$ . Einerseits ist nach (3.6) und (3.8)  $\mathbf{x}'' = k\mathbf{n}$  und andererseits mit (4.21)  $\mathbf{x}'' = k_n \mathbf{N} + k_g \mathbf{P}$ , woraus sich  $k\mathbf{n} = k_n \mathbf{N} + k_g \mathbf{P} = k_n \mathbf{N}$  ergibt. Bildet man von beiden Seiten dieser Beziehung die Norm, so ist wegen  $\|\mathbf{n}\| = \|\mathbf{N}\|$  auch  $|k_n| = |k|$  und deshalb  $\mathbf{n} = \pm \mathbf{N}$ .

b) Ist  $\mathbf{n} = \pm \mathbf{N}$ , so folgt  $k_n \mathbf{N} + k_g \mathbf{P} = k\mathbf{n} = \pm k \mathbf{N}$ . Indem diese Beziehung skalar mit  $\mathbf{P}$  multipliziert wird (es ist  $(\mathbf{N}, \mathbf{P}) = 0$  und  $\|\mathbf{P}\| = 1$ ), ergibt sich

$$0 = \pm k (\mathbf{N}, \mathbf{P}) = k_n (\mathbf{N}, \mathbf{P}) + k_g (\mathbf{P}, \mathbf{P}) = k_g.$$

Nach Definition 4.14 ist  $\mathbf{x}(s)$  damit eine Geodäte. ■

Unmittelbar aus Formel (4.43) für  $k_g$  ergibt sich eine weitere hinreichende und notwendige Bedingung, die eine Geodäte erfüllen muss.

**Satz 4.8** Eine Flächenkurve  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(u^1(t), u^2(t))$  ist genau dann eine Geodäte, wenn die Funktionen  $u^1(t), u^2(t)$  die **Geodätengleichungen**

$$\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k = 0 \quad k = 1, 2 \quad (4.44)$$

erfüllen.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich mit (4.43) unmittelbar daraus, dass  $k_g = 0$  genau dann eintritt, wenn  $\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k = 0$  für  $k = 1, 2$ . In (4.44) gehen als Koeffizienten nur die ausschließlich von den Metrikoeffizienten abhängigen CHRISTOFFEL-Symbole  $\Gamma_{ij}^k$  ein. Die Eigenschaft einer Flächenkurve Geodäte zu sein, ist deshalb eine innergeometrische Eigenschaft. Die Gleichungen (4.44) bilden ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die beiden Funktionen  $u^1(t)$  und  $u^2(t)$ .

**Beispiel 4.17** Auf einer Ebene mit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u}) = \mathbf{X}_0 + u^1 \mathbf{a} + u^2 \mathbf{b}$  (siehe Beispiel 4.1 und 4.15) verschwinden sämtliche CHRISTOFFEL-Symbole, so dass aus (4.44) die Differentialgleichungen  $\ddot{u}^k = 0$  mit den Lösungen  $u^k(t) = c^k t + d^k$  ( $k = 1, 2; c^k, d^k \in \mathbb{R}$ ) folgen. Daraus ergeben sich die Geodäten

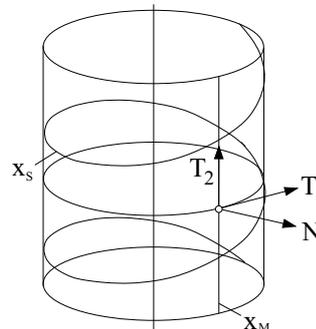
$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{X}(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{X}_0 + (c^1 t + d^1) \mathbf{a} + (c^2 t + d^2) \mathbf{b} \\ &= (\mathbf{X}_0 + d^1 \mathbf{a} + d^2 \mathbf{b}) + t (c^1 \mathbf{a} + c^2 \mathbf{b}), \end{aligned}$$

die Geraden auf der Ebene sind.

**Beispiel 4.18** Die Mantelfläche eines Rotationszylinders mit dem Radius  $R$  und der  $X_3$ -Achse als Rotationsachse hat die Standardparametrisierung

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} R \cos(u^1) \\ R \sin(u^1) \\ u^2 \end{pmatrix}$$

$$u^1, u^2 \in \mathbb{R}$$



Aus dieser Parametrisierung sind sofort die begleitenden Dreibeine

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} -R \sin(u^1) \\ R \cos(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos(u^1) \\ \sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ableitbar.

a) Meridianlinien  $\mathbf{x}_M(t) = \mathbf{X}(c, t)$  sind wegen  $\ddot{\mathbf{x}}_M(t) = \mathbf{0}$  und damit  $[\mathbf{N}, \dot{\mathbf{x}}_M, \ddot{\mathbf{x}}_M] = 0$  Geodäten auf der Zylindermantelfläche.

b) Schraubenlinien haben gemäß Beispiel 3.4 (mit  $\alpha = 1$ ) die Parametrisierung

$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{X}(t, \beta t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \\ \beta t \end{pmatrix} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

und verlaufen damit auf der Mantelfläche. Mit  $\ddot{\mathbf{x}}_s(t) = -R\mathbf{N}(\mathbf{u}(t))$  verschwindet das Spatprodukt  $[\mathbf{N}, \dot{\mathbf{x}}_s, \ddot{\mathbf{x}}_s] = -R[\mathbf{N}, \dot{\mathbf{x}}_s, \mathbf{N}] = 0$ . Schraubenlinien sind folglich Geodäten dieser Fläche. Im Spezialfall  $\beta = 0$  entstehen Breitenkreise des Zylinders, die damit auch Geodäten sind.

**Beispiel 4.19** Für die Breitenkreise  $\mathbf{x}_\alpha(t) = \mathbf{X}(t, \alpha)$  der Einheitssphäre  $S^2$  mit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  gemäß (4.2) erhält man

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha(t) = \sin(\alpha) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{x}}_\alpha(t) = -\sin(\alpha) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Flächennormalenvektor  $\mathbf{N}_\alpha(t) = -\mathbf{X}(t, \alpha)$  (siehe Beispiel 4.5) ergibt sich für die Breitenkreise  $\mathbf{x}_\alpha$  die geodätische Krümmung

$$k_g = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}_\alpha\|^3} [\mathbf{N}_\alpha, \dot{\mathbf{x}}_\alpha, \ddot{\mathbf{x}}_\alpha] = \frac{1}{\sin^3(\alpha)} (\mathbf{N}_\alpha, \dot{\mathbf{x}}_\alpha \times \ddot{\mathbf{x}}_\alpha) = -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = -\cot(\alpha).$$

Von allen Breitenkreisen ist folglich nur der Äquator mit  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  eine Geodäte.  $\mathbf{x}_{\pi/2}(t)$  ist ein Großkreis von  $S^2$ , dessen Mittelpunkt sich im Ursprung  $\mathbf{0}$  des  $\mathbb{R}^3$  befindet. Jeder andere Großkreis  $\mathbf{x}_G(t)$  auf  $S^2$  geht aus  $\mathbf{x}_{\pi/2}(t)$  durch eine EUKLIDISCHE Bewegung  $\mathbf{x}_G = \mathbf{Q}\mathbf{x}_{\pi/2}$  mit der orthogonalen Matrix  $\mathbf{Q}$  hervor. Aus der Invarianz des Spatproduktes gegenüber EUKLIDISCHEN Bewegungen ergibt sich, dass damit auch die geodätische Krümmung von  $\mathbf{x}_G$  verschwindet. Jeder Großkreis und insbesondere alle durch die Pole verlaufenden Längenkreise auf  $S^2$  sind folglich Geodäten.

Auf systematischem Wege werden Geodäten einer Fläche durch Lösung des Differenzialgleichungssystems (4.44) konstruiert. Dazu muss (4.44) durch geeignete Zusatzbedingungen ergänzt werden, was zu folgenden Problemstellungen führt:

1. Die zu konstruierende Geodäte soll durch den Flächenpunkt  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{u}_0)$  mit  $\mathbf{u}_0 = (u_0^1, u_0^2)^T \in U$  verlaufen und in diesem Punkt den Tangentenvektor

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{X}_{,k}(\mathbf{u}_0) U^k = U^k \mathbf{T}_k(\mathbf{u}_0) \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}_0}$$

besitzen. Das Differenzialgleichungssystem (4.44) ist dann durch die folgenden Anfangsbedingungen zu ergänzen:

$$u^k(t_0) = u_0^k \quad \text{und} \quad \dot{u}^k(t_0) = U^k \quad k = 1, 2. \quad (4.45)$$

Damit liegt ein **Anfangswertproblem** für ein gewöhnliches Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung vor. Unter der Voraussetzung einer hinreichend glatten Flächenparametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  folgt aus der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen (siehe z.B. [MeVa], Bd. 2) die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung  $\mathbf{u}(t) = (u^1(t), u^2(t))^T$  von (4.44) mit den Anfangsbedingungen (4.45) in einer Umgebung von  $\mathbf{u}_0$ . Zu jedem Flächenpunkt  $\mathbf{X}_0$  und einem beliebigen Tangentenvektor  $\mathbf{t}_0 = U^k \mathbf{T}_k \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}_0}$  gibt es genau eine Geodäte  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(t))$  mit  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{X}_0$  und  $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{t}_0$ . Die Umgebung, in der diese Geodäte existiert, ist von den Eigenschaften der Fläche abhängig.

Bei vorgegebenem normiertem Tangentenvektor  $\mathbf{t}_0$  ( $\|\mathbf{t}_0\| = \|U^k \mathbf{T}_k\| = 1$ ) ist die konstruierte Geodäte nach der Bogenlänge parametrisiert.

**Beweis.** Nach Definition 3.6 ist zu zeigen, dass  $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = 1$  oder wegen  $\|\dot{\mathbf{x}}(t_0)\| = \|\mathbf{t}_0\| = 1$  dazu gleichbedeutend  $\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) = 0$ .

Mit den Ableitungsgleichungen nach GAUß und (4.29) ist zunächst

$$G_{ij,k} = (\mathbf{X}_{,ik}, \mathbf{X}_{,j}) + (\mathbf{X}_{,i}, \mathbf{X}_{,jk}) = \Gamma_{ik}^s G_{sj} + \Gamma_{jk}^s G_{is}.$$

Mit dieser Formel folgt nach Ableitung von  $(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) = G_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j$  gemäß der Produktregel der Differenziation und nach Umbenennung der Indizes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) &= G_{ij,k} \dot{u}^k \dot{u}^i \dot{u}^j + G_{sj} \ddot{u}^s \dot{u}^j + G_{is} \dot{u}^i \ddot{u}^s \\ &= G_{sj} (\Gamma_{ik}^s \dot{u}^i \dot{u}^k + \ddot{u}^s) \dot{u}^j + G_{is} (\Gamma_{jk}^s \dot{u}^j \dot{u}^k + \ddot{u}^s) \dot{u}^i = 0. \end{aligned}$$

In den Klammern stehen die linken Seiten der Differenzialgleichungen (4.44), so dass dieser letzte Ausdruck verschwindet. ■

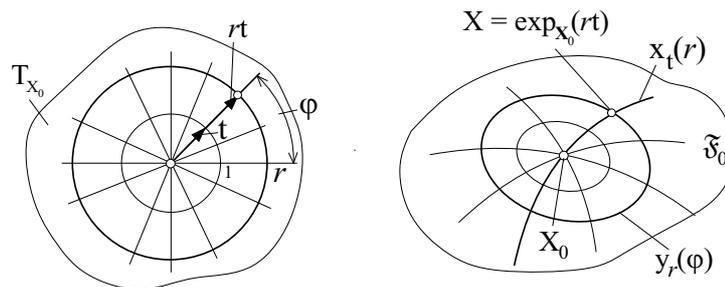
2. Auf einem Flächenstück sind die hinreichend nahe beieinander liegenden Punkte  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{u}_0)$  und  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(\mathbf{u}_1)$  ( $\mathbf{u}_i = (u_i^1, u_i^2)^T$ ) vorgegeben. Zu konstruieren ist eine durch  $\mathbf{X}_0$  und  $\mathbf{X}_1$  verlaufende Geodäte des Flächenstückes. In diesem Fall wird das System (4.44) durch die Randbedingungen

$$u^k(t_0) = u_0^k \quad \text{und} \quad u^k(t_1) = u_1^k \quad k = 1, 2 \quad \text{und} \quad t_0 < t_1$$

ergänzt. Bei hinreichend glatter Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  besitzt dieses **Randwertproblem** ebenfalls eine eindeutig bestimmte Lösung  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  mit  $\mathbf{u}(t_i) = \mathbf{u}_i$  ( $i = 0, 1$ ). In einer hinreichend kleinen Umgebung beider Flächenpunkte existiert damit genau eine beide Punkte verbindende Geodäte  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(t))$ . Daraus folgt weiter, dass sich alle von einem Flächenpunkt ausgehenden Geodäten in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes nicht schneiden oder berühren (abgesehen in diesem Punkt selbst). Die so konstruierten Geodäten sind jedoch im Allgemeinen nicht nach der Bogenlänge parametrisiert. Dass sich diese Aussagen nur auf eine hinreichend kleine Umgebung der beiden durch eine Geodäte verbundenen und hinreichend nahe beieinander liegenden Punkte bezieht, soll mit dem folgenden Beispiel untermauert werden.

**Beispiel 4.20** Die Punkte  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(u_0^1, u_0^2)$  und  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(u_1^1, u_1^2)$  der Mantelfläche eines Zylinders, die sich nicht auf dem gleichen Breitenkreis befinden ( $u_0^2 \neq u_1^2$ ), können durch eine Schraubenlinie, die nach Beispiel 4.18 Geodäte ist, verbunden werden. Lässt man die gesamte Mantelfläche mit  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ ) für den Kurvenverlauf zu, so gibt es unendlich viele beide Punkte verbindende Schraubenlinien mit verschiedenen Steigungen  $\beta$ . Gilt aber z.B.  $0 < u_0^1 < u_1^1 < 2\pi$  und schränkt man den Parameterbereich auf den Streifen  $U_0 = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  ein, so existiert genau ein Teilstück einer Schraubenlinie, welches beide Punkte verbindet. Liegen  $\mathbf{X}_0$  und  $\mathbf{X}_1$  auf einem Breitenkreis des Zylinders, so können diese bei uneingeschränktem Parameterbereich stets durch zwei Geodäten verbunden werden, die gleich den beiden von  $\mathbf{X}_0$  und  $\mathbf{X}_1$  begrenzten Teilkurven des Breitenkreises entsprechen.

**Bemerkung 4.31** Wie im vorstehenden Punkt 1. gezeigt, gibt es zu einem festen Flächenpunkt  $\mathbf{X}_0$  in jede Tangentenrichtung  $\mathbf{t} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}_0}$  mit  $\|\mathbf{t}\| = 1$  eine eindeutig nach der Bogenlänge  $r = s$  parametrisierte Geodäte  $\mathbf{x}_t(r)$  ( $0 < r < s_0$ ). Die Gesamtheit dieser Geodäten bildet eine Schar von Kurven, die sich ausgehend von  $\mathbf{X}_0$  sternförmig bis zu einem von der Richtung  $\mathbf{t}$  abhängigen Punkt ausbreiten.



Die Menge aller der Punkte dieser Geodäten, die zu einer festen Bogenlänge  $r = s$  ( $0 < r < s_0$ ) gehören, bilden eine geschlossene Kurve (geodätischer Kreis)  $\mathbf{y}_r(\varphi)$  ( $\varphi \in \mathbb{R}$ ), die jede Geodäte unter einem rechten Winkel schneidet. Die beiden Kurvenscharen  $\mathbf{y}_r(\varphi)$  ( $0 < r < s_0$ ) und  $\mathbf{x}_t(r)$  ( $\mathbf{t} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}_0}$ ,  $\|\mathbf{t}\| = 1$ ) bilden folglich ein orthogonales Liniennetz, welches **geodätisches Polarkoordinatensystem** genannt wird. Verbunden damit ist eine (GAUßsche) Parametrisierung  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(r, \varphi)$  eines Flächenstückes  $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$  in der Umgebung von  $\mathbf{X}_0$  durch die **geodätischen Polarkoordinaten**  $r$  und  $\varphi$ , die jedem Parameterpaar  $r, \varphi$  ( $0 < r < s_0$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ ) einen Flächenpunkt  $\mathbf{X} \in \mathfrak{F}_0$  zuordnen. Im Punkt  $\mathbf{X}_0$  ist diese Parametrisierung jedoch nicht regulär. Zwischen den Vektoren  $r\mathbf{t}$  und den Punkten  $\mathbf{x}_t(r)$  auf einer Geodäten besteht die Abbildung:

$$\exp_{\mathbf{X}_0} : \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{T}_{\mathbf{X}_0} \rightarrow \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F} \quad \text{gemäß} \quad r\mathbf{t} \in \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{x}_t(r).$$

Diese Abbildung heißt **Exponentialabbildung** und ist in einer hinreichend kleinen Umgebung  $\mathbf{V}_0$  des Ursprungs von  $\mathbf{T}_{\mathbf{X}_0}$  bijektiv und stetig differenzierbar, d.h. ein Diffeomorphismus. Durch die Exponentialabbildung werden die vom Ursprung des Tangentialraumes  $\mathbf{T}_{\mathbf{X}_0}$  ausgehenden Geraden  $r\mathbf{t}$  ( $r > 0$ ) auf die entsprechenden Geodäten  $\mathbf{x}_t(r)$  der Fläche  $\mathfrak{F}$  durch den Punkt  $\mathbf{X}_0$  abgebildet. Mit der Parametrisierung der Geodäten nach ihrer Bogenlänge ist diese Abbildung außerdem isometrisch, d.h., Strecken auf den

Ursprungsgeraden in  $\mathbf{T}_{\mathbf{x}_0}$  und ihre Bildlinien auf den entsprechenden Geodäten haben die gleiche Länge.

Bei einer Parametrisierung mittels geodätischer Polarkoordinaten gilt für die Tangentebasisvektoren  $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1) = 1$  und  $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) = 0$ , so dass die erste metrische Fundamentalform die Darstellung

$$\mathbf{G}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } G_{22} = (\mathbf{X}_{,\varphi}, \mathbf{X}_{,\varphi}) \quad \text{und} \quad \mathbf{X}_{,\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{X}(r, \varphi)$$

annimmt.

Eine Ebene ist nach Wahl eines Ursprunges  $P_0$  stets durch Polarkoordinaten parametrisierbar. Die Koordinatenlinien sind die von  $P_0$  ausgehenden Geraden und die konzentrischen Kreise mit dem Mittelpunkt in  $P_0$ . Jeder Punkt der Ebene außer dem Punkt  $P_0$  wird auf diese Weise regulär parametrisiert. Ist die Ebene durch  $\mathbf{X}(u^1, u^2) = \mathbf{X}_0 + u^1 \mathbf{a} + u^2 \mathbf{b}$  mit  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ ,  $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{X}_0$  gegeben, so ergibt sich für ihre Parametrisierung in gewöhnlichen Polarkoordinaten:

$$\mathbf{X}(r, \varphi) = \mathbf{X}_0 + r \cos(\varphi) \mathbf{a} + r \sin(\varphi) \mathbf{b}; \quad r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Auf einer Kugel bildet das Liniennetz der vom Nordpol ausgehenden Längengrade und die Breitenkreise ein (sphärisches) Polarkoordinatensystem. Diese Parametrisierung ist außer im Nord- und Südpol für jeden Punkt der Kugeloberfläche regulär. Im Falle der Einheitssphäre  $S^2$  entspricht (4.2) mit  $u^2 = r$  und  $u^1 = \varphi$  einer Parametrisierung in geodätischen Polarkoordinaten.

In der Ebene ist die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei beliebigen Punkten das durch diese Punkte verlaufende Geradenstück. Die Geraden, die Geodäten der Ebene sind, realisieren also die kürzeste Verbindung zwischen Punkten auf einer Ebene. Die Geodäten einer beliebigen Fläche wurden in einer freien Interpretation als verallgemeinerte Geraden der Fläche interpretiert. Es liegt deshalb nahe, unter den Geodäten die Flächenkurven zu suchen, die Punkte einer Fläche auf kürzestem Wege verbinden.

**Satz 4.9** Auf einer  $C^2$ -Fläche mit der Parametrisierung  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ) verlaufe eine  $C^2$ -Kurve mit  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(s))$ , die zwei Punkte  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{u}_0)$  und  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(\mathbf{u}_1)$  auf kürzestem Wege verbindet, dann ist  $\mathbf{x}(s)$  notwendigerweise Teil einer Geodäte der Fläche.

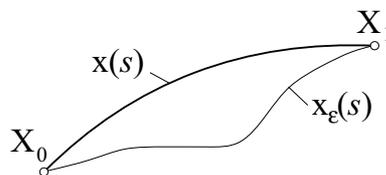
**Beweis.**  $\mathbf{x}(s)$  sei nach der Bogenlänge parametrisiert und realisiere die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{u}(s_0))$  und  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(\mathbf{u}(s_1))$  mit  $s_0 < s_1$ . Zu zeigen ist, dass  $\mathbf{x}(s)$  mit  $s_0 \leq s \leq s_1$  eine Geodäte ist. Dies geschieht auf der Grundlage der Variationsrechnung.

Neben  $\mathbf{x}(s)$  werden  $C^2$ -Flächenkurven mit den Parametrisierungen  $\mathbf{x}_\varepsilon(s) = \mathbf{X}(\mathbf{u}_\varepsilon(s))$  eingeführt, wobei

$$\mathbf{u}_\varepsilon(s) = \mathbf{u}(s) + \varepsilon \mathbf{v}(s), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon(s) \in U \quad \text{für } s_0 \leq s \leq s_1$$

$$\text{und } \mathbf{v}(s_0) = \mathbf{v}(s_1) = \mathbf{0}.$$



Jede Kurve  $\mathbf{x}_\varepsilon(s)$  verbindet die Punkte  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}_\varepsilon(s_0)$  und  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_\varepsilon(s_1)$ . Bei der Bildung von Ableitungen der Parametrisierung  $\mathbf{x}_\varepsilon(s)$  muss beachtet werden, dass  $s$  im Allgemeinen nicht der Bogenlängenparameter für  $\mathbf{x}_\varepsilon$  ist. Die Bogenlänge von  $\mathbf{x}_\varepsilon(s)$  ( $s_0 \leq s \leq s_1$ ) ist

$$L_\varepsilon = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{G_{ij}(\mathbf{u}_\varepsilon(s)) \dot{u}_\varepsilon^i(s) \dot{u}_\varepsilon^j(s)} ds.$$

$L_\varepsilon$  nimmt nach Voraussetzung im Grenzfall  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{x}_\varepsilon(s) = \mathbf{x}(s)$  ein Minimum an. Die notwendige Voraussetzung dafür ist:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} L_\varepsilon \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{für alle (fest gewählten) } \mathbf{v} \text{ mit } \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}.$$

Mit  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (G_{ij} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^j)^{1/2} = G_{ij} (u^i)' (u^j)' = \|\dot{\mathbf{x}}(s)\|^2 = 1$  ( $\mathbf{x}(s)$  ist nach der Bogenlänge parametrisiert!) und  $\frac{d\dot{u}_\varepsilon^k}{d\varepsilon} = \dot{v}^k$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} (G_{ij} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^j)^{1/2} \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{G_{ij,k} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^j \dot{v}^k + 2G_{ik} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{v}^k}{2 (G_{ij} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^j)^{1/2}} \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{1}{2} \left[ G_{ij,k} (u^i)' (u^j)' \dot{v}^k + 2G_{ik} (u^i)' \dot{v}^k \right]. \end{aligned}$$

Unter der vorausgesetzten Glattheit der Kurven und  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  kann die Differenziation nach  $\varepsilon$  und Integration in den Grenzen  $s_0 \leq s \leq s_1$  vertauscht werden, was zu folgenden Ausdrücken führt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} L_\varepsilon \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} \left[ G_{ij,k} (u^i)' (u^j)' \dot{v}^k + 2G_{ik} (u^i)' \dot{v}^k \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} \left[ G_{ij,k} (u^i)' (u^j)' - 2 \left( G_{ik} (u^i)' \right)' \right] \dot{v}^k ds = 0. \end{aligned}$$

Hier wurde auf das zweite Glied im Integranden des ersten Integrals partielle Integration angewendet und berücksichtigt, dass  $\dot{v}^k(s_0) = \dot{v}^k(s_1) = 0$ . Dieses Integral verschwindet für alle stetig differenzierbaren Funktionen  $\mathbf{v}(s) = (v^1(s), v^2(s))^T$  mit  $\mathbf{u}_\varepsilon(s) = \mathbf{u}(s) + \varepsilon \mathbf{v}(s) \in U$ . Daraus folgt notwendigerweise, dass der in eckigen Klammern stehende Ausdruck des letzten Integrals Null sein muss. Im anderen Fall könnte

man eine zulässige Funktion  $\mathbf{v}(s)$  konstruieren, für die dieses Integral nicht verschwindet. Es ergeben sich also die Gleichungen

$$G_{ij,k} (u^i)' (u^j)' - 2 (G_{ik} (u^i)')' = 0 \quad k = 1, 2.$$

Mit

$$\begin{aligned} 2 (G_{ik} (u^i)')' &= 2G_{ik,j} (u^i)' (u^j)' + 2G_{ik} (u^i)'' \\ &= (G_{ki,j} + G_{jk,i}) (u^i)' (u^j)' + 2G_{ik} (u^i)'' \end{aligned}$$

und der Formel (4.31) für die CHRISTOFFEL-Symbole nehmen diese Gleichungen folgende Form an

$$\begin{aligned} G_{ik} (u^i)'' + \frac{1}{2} (G_{ki,j} + G_{jk,i} - G_{ij,k}) (u^i)' (u^j)' &= 0 \\ G^{lk} G_{ik} (u^i)'' + \frac{1}{2} G^{lk} (G_{ki,j} + G_{jk,i} - G_{ij,k}) (u^i)' (u^j)' &= 0 \\ (u^l)'' + \Gamma_{ij}^l (u^i)' (u^j)' &= 0 \quad l = 1, 2. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (4.44) zeigt, dass es sich hierbei um das Differenzialgleichungssystem für eine Geodäte handelt, folglich ist  $\mathbf{x}(s)$  auch eine Geodäte. ■

**Bemerkung 4.32** Die kürzeste Verbindungslinie zweier Flächenpunkte ist auf beliebigen Flächen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Als Beispiel können zwei diametral gegenüberliegende Punkte, konkret der Nord- und Südpol, der Einheitssphäre dienen. Jeder Halbkreis, der auch Längengrad ist, realisiert die kürzeste Verbindung dieser Punkte. Es gibt folglich unendlich viele kürzeste Verbindungen zwischen beiden Punkten.

Die Bedingung des Satzes ist nicht hinreichend dafür, dass  $\mathbf{x}(s)$  kürzeste Verbindungslinie zwischen Flächenpunkten ist. D.h., eine Geodäte, die zwei Flächenpunkte verbindet, muss nicht zwangsläufig die kürzeste Verbindung zwischen diesen Punkten herstellen. Betrachtet man z.B. zwei nicht diametral gegenüber liegende Punkte auf dem Äquator der Einheitssphäre, so werden diese durch zwei Geodäten auf dem Äquator unterschiedlicher Länge verbunden. Gibt es andererseits eine kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Flächenpunkten, so ist diese zwangsläufig Teil einer Geodäten.

## 4.9. Ausgewählte Flächen

Auf einem regulär parametrisierbaren Flächenstück gibt es zwei Scharen von Kurven, die Koordinatenlinien. Es lassen sich aber auch in mannigfaltiger Weise Flächen erzeugen, indem man umgekehrt von zwei vorgegebenen (unabhängigen) Kurvenscharen ausgeht und damit eine regulär parametrisierbare Fläche beschreibt. Auf der Grundlage dieser Vorgehensweise werden die im Folgenden zu besprechenden Flächen konstruiert.

## I. Drehflächen

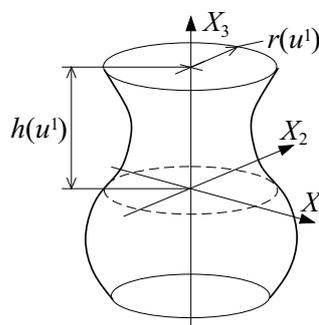
Die Punktmenge einer Drehfläche kann als Spur aufgefasst werden, die eine ebene Kurve bei Drehung um eine starre gerade Achse im Raum hinterlässt. Ohne auf Allgemeinheit zu verzichten kann die erzeugende Kurve in der  $X_1X_3$ -Ebene platziert werden und die  $X_3$ -Achse als Drehachse dienen. Geht man von der Kurvenparametrisierung

$$\mathbf{x}(u^1) = \begin{pmatrix} X_1(u^1) \\ X_3(u^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(u^1) \\ h(u^1) \end{pmatrix} \quad u^1 \in I \subset \mathbb{R}$$

mit den wenigstens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $r, h : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $r(u^1) > 0$  für alle  $u^1 \in I$ ) aus, so ist die daraus entstehende **Drehfläche** wie folgt parametrisierbar:

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} r(u^1) \cos(u^2) \\ r(u^1) \sin(u^2) \\ h(u^1) \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

$u^1 \in I, \quad u^2 \in \mathbb{R}$



Die Koordinatenlinien  $\mathbf{X}(u^1, c)$  heißen **Meridiane** und  $\mathbf{X}(c, u^2)$  **Breitenkreise** der Drehfläche. Auf der Grundlage dieser Standardparametrisierung sind Drehflächen sehr bequem analysierbar.

Zunächst ist unter den getroffenen Voraussetzungen in jedem Flächenpunkt das begleitende Dreibein  $\mathbf{T}_i = \mathbf{X}_{,i}$  ( $i = 1, 2$ ),  $\mathbf{N}$  berechenbar:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos(u^2) \\ \dot{r} \sin(u^2) \\ \dot{h} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} -r \sin(u^2) \\ r \cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{h}^2}} \begin{pmatrix} -\dot{h} \cos(u^2) \\ -\dot{h} \sin(u^2) \\ \dot{r} \end{pmatrix},$$

dabei ist  $\dot{r} = \frac{dr(u^1)}{du^1}$  und  $\dot{h} = \frac{dh(u^1)}{du^1}$ . Für jedes Parameterpaar  $(u^1, u^2) \in I \times \mathbb{R}$  bilden  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$  eine orthogonale Tangentenbasis, womit die Regularität der (GAUßschen) Parametrisierung gesichert ist. Zusammen mit den zweiten partiellen Ableitungen

$$\mathbf{X}_{,11} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos(u^2) \\ \ddot{r} \sin(u^2) \\ \ddot{h} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_{,12} = \begin{pmatrix} -\dot{r} \sin(u^2) \\ \dot{r} \cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_{,22} = \begin{pmatrix} -r \cos(u^2) \\ -r \sin(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergeben sich über  $G_{ij} = (\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j)$  und  $L_{ij} = (\mathbf{X}_{,ij}, \mathbf{N})$  die metrischen Fundamentalgrößen

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \dot{r}^2 + \dot{h}^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L} = \frac{1}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{h}^2}} \begin{pmatrix} \dot{r}\ddot{h} - \dot{h}\ddot{r} & 0 \\ 0 & r\dot{h} \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Mit diesen Größen können die Krümmungseigenschaften von Drehflächen untersucht werden. Aus dem Eigenwertproblem  $(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$  mit der Matrix

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L} = \frac{1}{(\dot{r}^2 + \dot{h}^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \dot{r}\ddot{h} - \ddot{r}\dot{h} & 0 \\ 0 & \frac{\dot{h}(\dot{r}^2 + \dot{h}^2)}{r} \end{pmatrix}$$

folgen die Hauptkrümmungen

$$\lambda_1 = \frac{\dot{r}\ddot{h} - \ddot{r}\dot{h}}{(\dot{r}^2 + \dot{h}^2)^{3/2}} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{\dot{h}}{r\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{h}^2}}$$

und schließlich die Krümmungsgrößen

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{r(\dot{r}\ddot{h} - \ddot{r}\dot{h}) + \dot{h}(\dot{r}^2 + \dot{h}^2)}{2r(\dot{r}^2 + \dot{h}^2)^{3/2}} \quad (4.48)$$

$$K = \lambda_1\lambda_2 = \frac{\dot{h}(\dot{r}\ddot{h} - \ddot{r}\dot{h})}{r(\dot{r}^2 + \dot{h}^2)^2}.$$

**Bemerkung 4.33** *Ist die erzeugende Kurve  $\mathbf{x}(u^1)$  nach der Bogenlänge  $s = u^1$  parametrisiert, so vereinfachen sich diese Formeln bedeutend. In diesem Fall ist  $\|\mathbf{x}'(s)\|^2 = (r'(s))^2 + (h'(s))^2 = 1$  und nach Ableitung bezüglich  $s$ :  $r''r' + h''h' = 0$ . Damit erhält man die Hauptkrümmungen*

$$\lambda_1 = r'h'' - r''h' = \frac{h''}{r'} = -\frac{r''}{h'}, \quad \lambda_2 = \frac{h'}{r}$$

und weiter die Invarianten

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{h''}{r'} + \frac{h'}{r} \right) = \frac{(rh')'}{(r^2)'}, \quad K = -\frac{r''}{r}. \quad (4.49)$$

Werden der mittleren Krümmung  $H$  und/oder der GAUßschen Krümmung  $K$  vorgegebene Werte zugewiesen, so sind die Formeln (4.48) und (4.49) als Differenzialgleichungen in  $r$  und  $h$  zu betrachten. Deren Lösungsfunktionen  $r(u^1)$  und  $h(u^1)$  definieren dann eine Drehfläche mit den vorgegebenen Krümmungswerten. Fordert man z.B., dass eine zu erzeugende Drehfläche konstante GAUßsche Krümmung  $K = K_0$  aufweisen soll, so folgt aus (4.49) die Differenzialgleichung  $r'' + K_0r = 0$  unter der Nebenbedingung  $(r')^2 + (h')^2 = 1$  (Parametrisierung nach der Bogenlänge!). Lösungen dieses Problems findet man z.B. in [Kühn].

**Bemerkung 4.34** *Aus den Formeln (A.3) (siehe dazu Aufgabe 5 aus Abschnitt 4.13) für die geodätische Krümmung der Koordinatenlinien bei GAUßscher Parametrisierung*

ergeben sich folgende Aussagen zu den Meridianlinien und Breitenkreisen einer Drehfläche:

Mit  $G_{11,2} = 0$  leitet man aus (A.3) für eine Meridianlinie  $(\mathbf{X}(u^1, c))$  die geodätische Krümmung  $k_{g1} = 0$  ab. Meridianlinien einer Drehfläche sind damit stets Geodäten. Für die geodätische Krümmung eines Breitenkreises  $(\mathbf{X}(c, u^2))$  folgt aus (A.3):

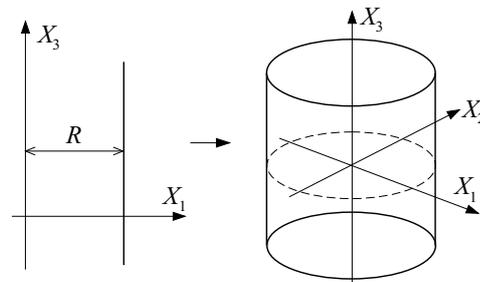
$$k_{g2} = \frac{\dot{r}}{r\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{h}^2}}.$$

Ein Breitenkreis ist deshalb nur dann eine Geodäte, wenn  $\dot{r}(u^1) = 0$ . In diesem Fall ist die Tangente an die erzeugende ebene Kurve parallel zur  $X_3$ -Achse.

### Beispiel 4.21 (Drehflächen)

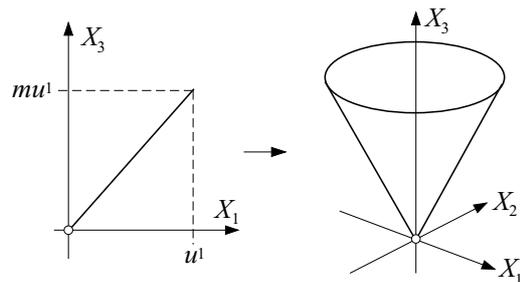
#### 1. Kreiszyklindermantelfläche:

$$\begin{aligned} r(u^1) &= R \\ h(u^1) &= u^1 \\ u^1 &\in \mathbb{R} \\ (X_1)^2 + (X_2)^2 &= R^2 \end{aligned}$$



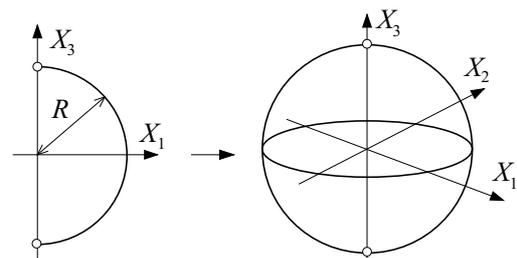
#### 2. Kreiskegelmantelfläche:

$$\begin{aligned} r(u^1) &= u^1 \\ h(u^1) &= mu^1 \\ u^1 &> 0 \\ (X_1)^2 + (X_2)^2 &= m^2 (X_3)^2 \end{aligned}$$



#### 3. Kugeloberfläche:

$$\begin{aligned} r(u^1) &= R \sin(u^1) \\ h(u^1) &= R \cos(u^1) \\ 0 < u^1 < \pi; R > 0 \\ (X_1)^2 + (X_2)^2 + (X_3)^2 &= R^2 \end{aligned}$$



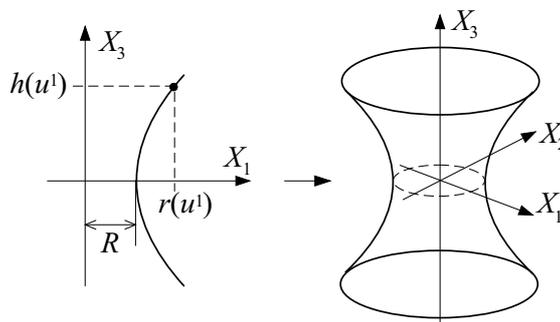
## 4. Rotationshyperboloid:

$$r(u^1) = \sqrt{R^2 + (u^1)^2}$$

$$h(u^1) = \frac{b}{R}u^1$$

$$u^1 \in \mathbb{R}, \quad R > 0, \quad b > 0$$

$$\frac{(X_1)^2}{R^2} + \frac{(X_2)^2}{R^2} - \frac{(X_3)^2}{b^2} = 1$$

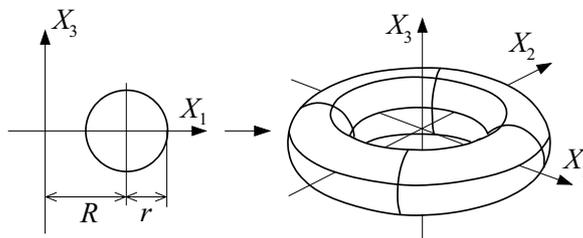


## 5. Torus:

$$r(u^1) = r \cos(u^1) + R$$

$$h(u^1) = r \sin(u^1)$$

$$0 \leq u^1 < 2\pi; \quad 0 < r < R$$

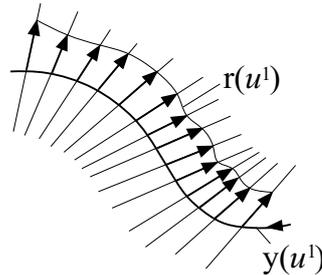


## II. Regelflächen

Eine Regelfläche ist als geometrisches Objekt beschreibbar, welches aus kontinuierlich aneinandergefügten Geraden besteht. Auszugehen ist von einer regulär parametrisierten  $C^2$ -Kurve  $\mathbf{y}(u^1) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  und einem ebenfalls zweimal stetig differenzierbaren Richtungsfeld  $\mathbf{r}(u^1) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , wobei die lineare Unabhängigkeit der Vektoren  $\dot{\mathbf{y}}(u^1) = \frac{d\mathbf{y}(u^1)}{du^1}$  und  $\mathbf{r}(u^1)$  für alle  $u^1 \in I$  vorausgesetzt wird. Diese beiden Vektorfunktionen legen für jeden festen Parameterwert  $u^1 \in I$  eine Gerade  $\mathbf{y}(u^1) + u^2\mathbf{r}(u^1)$  fest. Die Gesamtheit dieser Geraden bildet eine Fläche mit der Parametrisierung

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \mathbf{y}(u^1) + u^2\mathbf{r}(u^1) \quad (4.50)$$

$$u^1 \in I, \quad u^2 \in \mathbb{R}.$$



Anschaulich kann man sich eine Regelfläche als Spur vorstellen, die die gerade Stange eines Jongleurs hinterlässt, wenn sich dieser entlang einer Kurve im Raum bewegt. Die Kurve  $\mathbf{y}(u^1)$  heißt **Leitkurve** und die mit  $\mathbf{r}(u^1)$  als Richtungsvektoren gebildeten Geraden nennt man **erzeugende Geraden** (oder einfach Erzeugende) einer Regelfläche. Die Tangentenbasisvektoren

$$\mathbf{X}_{,1}(u^1, u^2) = \dot{\mathbf{y}}(u^1) + u^2\dot{\mathbf{r}}(u^1) \quad , \quad \mathbf{X}_{,2}(u^1, u^2) = \mathbf{r}(u^1)$$

sind wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von  $\dot{\mathbf{y}}(u^1)$  und  $\mathbf{r}(u^1)$  für jedes Parameterpaar  $(u^1, 0)$  ebenfalls linear unabhängig. Aus der geforderten Glattheit der Funktionen  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{r}$  folgt, dass zu jedem  $u^1 \in I$  Umgebungen  $U_{u^1} \subset \mathbb{R}^2$  mit  $(u^1, 0) \in U_{u^1}$  existieren, in denen die Tangentenbasisvektoren immer noch linear unabhängig sind. In der Vereinigung  $U = \bigcup_{u^1 \in I} U_{u^1}$  aller dieser Umgebungen ist damit die Regularität der Parametrisierung (4.50) gesichert. Eine mit dieser Einschränkung durch (4.50) parametrisierte Fläche wird **Regelfläche** genannt.

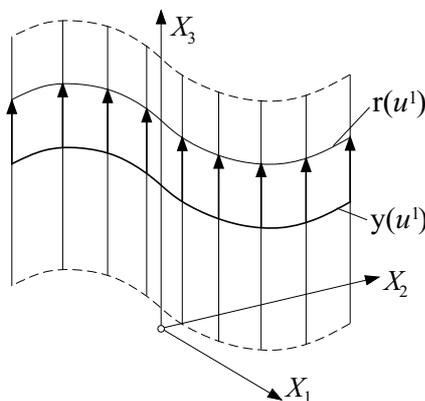
**Beispiel 4.22** (Regelflächen)

## 1. Verallgemeinerte Zylinderfläche:

$\mathbf{y}(u^1) = (y_1(u^1), y_2(u^1), 0)^T$   
 reguläre Parametrisierung einer  
 ebenen doppelpunktfreien Kurve

$$\mathbf{r}(u^1) = (0, 0, 1)^T$$

$$u^2 \in \mathbb{R}$$



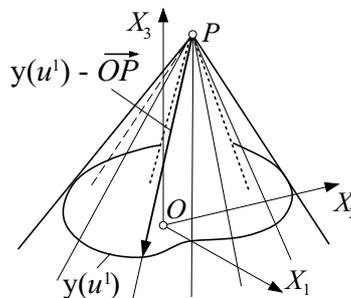
Mit  $\mathbf{y}(u^1) = (\alpha u^1, \beta u^1, 0)^T$  ( $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ ) erhält man als Spezialfall eine Ebene.

## 2. Verallgemeinerte Kegelfläche:

$\mathbf{y}(u^1) = (y_1(u^1), y_2(u^1), 0)^T$   
 reguläre Parametrisierung einer  
 ebenen doppelpunktfreien Kurve

$$\mathbf{r}(u^1) = \mathbf{y}(u^1) - \overrightarrow{OP}$$

mit  $\overrightarrow{OP} = (P_1, P_2, P_3)^T$  und  $P_3 \neq 0$ ,  
 $u^2 \in (-1, \infty)$

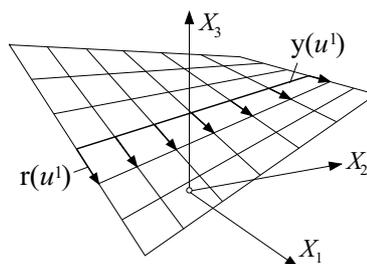


## 3. Hyperbolisches Paraboloid:

$$\mathbf{y}(u^1) = (au^1, bu^1, 0)^T$$

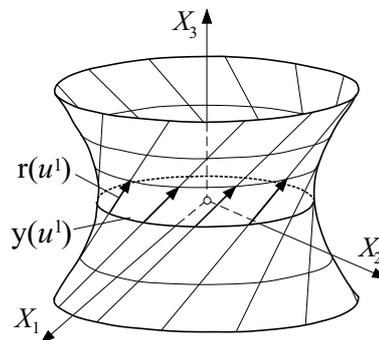
$$\mathbf{r}(u^1) = (a, -b, 4u^1)^T$$

$$|a| + |b| \neq 0$$



## 4. Einschaliges Hyperboloid:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(u^1) &= (a \cos(u^1), b \sin(u^1), 0)^T \\ \mathbf{r}(u^1) &= (-a \sin(u^1), b \cos(u^1), c)^T \\ a, b &> 0, \quad c \neq 0\end{aligned}$$



5. Das im Beispiel 4.6 eingeführte MÖBIUS-Band ist ebenfalls eine Regelfläche.

**Bemerkung 4.35** Mit  $\mathbf{X}_{,22} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{X}_{,12} = \frac{d\mathbf{r}(u^1)}{du^1} = \dot{\mathbf{r}}$  erhält man aus (4.16) die folgenden Koeffizienten der zweiten metrischen Fundamentalform  $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}$  einer Regelfläche:

$$\begin{aligned}L_{22} &= (\mathbf{N}, \mathbf{X}_{,22}) = 0 \\ L_{12} &= (\mathbf{N}, \mathbf{X}_{,12}) = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, (\dot{\mathbf{y}} + u^2 \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r})}{\|(\dot{\mathbf{y}} + u^2 \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}\|} = \frac{[\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{r}]}{\|(\dot{\mathbf{y}} + u^2 \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}\|}.\end{aligned}\quad (4.51)$$

**Bemerkung 4.36** Aus den Formeln (4.51) folgt für die GAUßsche Krümmung

$$K = \frac{\det(\mathbf{L}_{\mathbf{X}})}{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})} = -\frac{(L_{12})^2}{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})} \leq 0.$$

Eine Regelfläche kann deshalb keine elliptischen Punkte enthalten. Es gilt außerdem:

$$K = 0 \Leftrightarrow [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{r}] = 0. \quad (4.52)$$

**Bemerkung 4.37** Eine Regelfläche mit der GAUßschen Krümmung  $K = 0$  heißt **Torse**. Torsen zeichnen sich dadurch aus, dass die Tangentialebenen zu allen Punkten einer erzeugenden Geraden  $\mathbf{X}(c, u^2) = \mathbf{y}(c) + u^2 \mathbf{r}(c)$  ( $c = \text{const}$ ) gleich sind.

Für die Flächen aus den Teilen 1. und 2. von Beispiel 4.22 folgt nach einfachen Rechnungen, dass  $[\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{r}] = 0$ . Damit sind Flächenstücke verallgemeinerter Zylinder- oder Kegelflächen Torsen. Zu den Torsen gehören auch die **Tangentenflächen**, deren erzeugende Geraden von den Tangentenvektoren  $\dot{\mathbf{y}}(u^1) \equiv \mathbf{r}(u^1)$  der Leitkurve  $\mathbf{y}(u^1)$  aufgespannt werden:

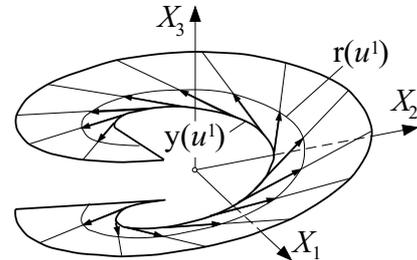
$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \mathbf{y}(u^1) + u^2 \dot{\mathbf{y}}(u^1). \quad (4.53)$$

Aus den Tangentenbasisvektoren  $\mathbf{X}_{,1} = \dot{\mathbf{y}} + u^2 \ddot{\mathbf{y}}$  und  $\mathbf{X}_{,2} = \dot{\mathbf{y}}$  ist ersichtlich, dass Tangentenflächen für  $u^2 = 0$ , d.h. längs der Leitkurven durch (4.53), nicht mehr regulär parametrisiert sind.  $\mathbf{y}(u^1)$  trägt deshalb auch den Namen **Gradkurve** der Tangentenfläche. Im Falle  $\ddot{\mathbf{y}}(u^1) \neq \mathbf{0}$  ist die Parametrisierung (4.53) für  $u^2 \neq 0$  regulär. Mit  $\mathbf{r} = \dot{\mathbf{y}}$  und  $\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{y}}$  folgt  $[\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{r}] = [\ddot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}}] = 0$  und damit  $K = 0$ .

**Beispiel 4.23** Zu den Tangentenflächen gehören die **Schraubentorsen**, die von einer Schraubenlinie als Leitkurve erzeugt werden. Zusammen mit Beispiel 3.4 ( $\alpha = 1$ ) folgt für eine Schraubentorse die Parameterdarstellung:

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} R(\cos(u^1) - u^2 \sin(u^1)) \\ R(\sin(u^1) + u^2 \cos(u^1)) \\ \beta(u^1 + u^2) \end{pmatrix}$$

$$u^1, u^2 \in \mathbb{R}; \quad u^2 > 0.$$

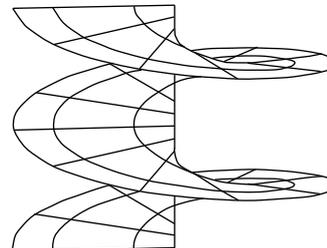


Anschaulich ist eine Schraubentorse als Auffahrt in ein kreiszylinderförmiges Parkhaus vorstellbar. Im Allgemeinen findet man Schraubentorsen im Trassenbau und im Zusammenhang mit Geländegestaltungen.

**Beispiel 4.24** Zu einer **Wendelfläche** kommt man, wenn als Leitkurve die  $X_3$ -Achse mit der Parametrisierung  $\mathbf{y}(u^1) = \beta u^1 \mathbf{e}_3$  und  $\mathbf{r}(u^1) = R(\cos(u^1), \sin(u^1), 0)^T$  gewählt wird:

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^2 R \cos(u^1) \\ u^2 R \sin(u^1) \\ \beta u^1 \end{pmatrix}$$

$$u^1 \in \mathbb{R}, \quad u^2 > 0.$$



(4.54)

## 4.10. Minimalflächen

Eine im Raum verlaufende geschlossene regulär parametrisierte (insbesondere doppel-punktfreie) Kurve kann als Rand einer Fläche angesehen werden. Die von einer solchen Raumkurve eingeschlossene Fläche ist innerhalb des Randes in vielfältiger Weise verformbar. Mit Bezug auf einen festen Rand hat man es deshalb mit einer Menge gleichberandeter Flächen zu tun und wird bestrebt sein, in dieser Menge nach Flächen mit besonderen Eigenschaften zu suchen. Eine für viele Aufgaben aus Natur und Technik interessante Frage ist: Gibt es unter diesen Flächen mit gleichem Rand solche mit kleinstem Inhalt? Diese Fragestellung führt zum Begriff der Minimalfläche.

Experimentell lassen sich derartige Flächen erzeugen, indem eine Drahtschleife in eine Seifenlösung getaucht wird. Beim Herausziehen der Schleife aus der Lösung bildet sich

infolge der Oberflächenspannung eine dünne Haut, die abhängig von der Schleifenkontur so geformt ist, dass ihr Flächeninhalt gegenüber dem Inhalt aller möglichen anderen Flächen innerhalb dieser Kontur einen minimalen Wert annimmt.

Auf einer  $C^2$ -Fläche  $\mathfrak{F}$  mit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ) verlaufe eine geschlossene doppelungsfreie Kurve mit  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(t))$  ( $t \in I$ ). Die von dieser Kurve eingeschlossene Teilfläche  $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$  wird ebenfalls mit  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U_0 \subset U$ ) beschrieben, wobei  $U_0$  zusammenhängend und die Abschließung  $\bar{U}_0$  eine beschränkte (und damit kompakte) Menge mit dem Rand

$$\partial U_0 = \bar{U}_0 - U_0 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R} \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}(t) ; t \in I\}$$

ist. Unter Einbeziehung des Einheitsnormalenfeldes  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U_0$ ) von  $\mathfrak{F}$  werden Flächen  $\mathfrak{F}_\varepsilon$  gemäß der Parametrisierung

$$\mathbf{X}^\varepsilon(\mathbf{u}) = \mathbf{X}(\mathbf{u}) + \varepsilon\mu(\mathbf{u})\mathbf{N}(\mathbf{u}) \quad \mathbf{u} \in U_0 ; \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ (hinreichend klein)}$$

eingeführt, wobei  $\mu(\mathbf{u})$  eine beliebige (aber fest gewählte) auf  $U_0$  zweimal stetig differenzierbare Funktion mit  $\mu(\mathbf{u}) = 0$  für alle  $\mathbf{u} \in \partial U_0$  ist.

**Satz 4.10** *Besitzt  $\mathfrak{F}_0$  unter allen Flächen  $\mathfrak{F}_\varepsilon$  den kleinsten Flächeninhalt, so muss notwendigerweise die mittlere Krümmung in jedem Flächenpunkt von  $\mathfrak{F}_0$  verschwinden:*

$$H(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\lambda_1(\mathbf{u}) + \lambda_2(\mathbf{u})) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{u} \in U_0. \quad (4.55)$$

**Beweis.** Mit den Tangentenvektoren

$$\mathbf{X}_{,i}^\varepsilon(\mathbf{u}) = \mathbf{X}_{,i}(\mathbf{u}) + \varepsilon\mu_{,i}(\mathbf{u})\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \varepsilon\mu(\mathbf{u})\mathbf{N}_{,i}(\mathbf{u}) \quad i = 1, 2$$

aus den Tangentialräumen der Flächenpunkte  $\mathbf{X}^\varepsilon(\mathbf{u})$  von  $\mathfrak{F}_\varepsilon$  ergeben sich über die Metrikkoeffizienten  $G_{ij}(\mathbf{u}) = (\mathbf{X}_{,i}, \mathbf{X}_{,j})$  zu  $\mathfrak{F}_0$  und wegen  $(\mathbf{X}_{,i}, \mathbf{N}) = 0$ ,  $(\mathbf{X}_{,i}, \mathbf{N}_{,j}) = -L_{ij}$  die Metrikkoeffizienten zu  $\mathfrak{F}_\varepsilon$ :

$$G_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u}) = G_{ij}(\mathbf{u}) - 2\varepsilon\mu(\mathbf{u})L_{ij}(\mathbf{u}) + C(\mathbf{u})\varepsilon^2.$$

In  $C(\mathbf{u})$  sind alle Glieder zusammengefasst, die multiplikativ mit  $\varepsilon^2$  verknüpft sind. Es

sei  $\mathbf{G}_\varepsilon(\mathbf{u}) = \{G_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u})\}$  und  $\mathbf{G}_\mathbf{X}(\mathbf{u}) = \{G_{ij}(\mathbf{u})\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\det(\mathbf{G}_\varepsilon))^{1/2} \right|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{1}{2(\det(\mathbf{G}_\varepsilon))^{1/2}} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (G_{11}^\varepsilon G_{22}^\varepsilon - (G_{12}^\varepsilon)^2) \right|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{1}{2(\det(\mathbf{G}_\varepsilon))^{1/2}} \left( \frac{\partial G_{11}^\varepsilon}{\partial \varepsilon} G_{22}^\varepsilon + G_{11}^\varepsilon \frac{\partial G_{22}^\varepsilon}{\partial \varepsilon} - 2 \frac{\partial G_{12}^\varepsilon}{\partial \varepsilon} G_{12}^\varepsilon \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{-\mu}{(\det(\mathbf{G}_\mathbf{X}))^{1/2}} (G_{22} L_{11} + G_{11} L_{22} - 2G_{12} L_{12}) \\
&= -\mu \operatorname{spur}(\mathbf{G}_\mathbf{X}^{-1} \mathbf{L}_\mathbf{X}) (\det(\mathbf{G}_\mathbf{X}))^{1/2} \\
&= -2\mu H (\det(\mathbf{G}_\mathbf{X}))^{1/2}.
\end{aligned}$$

Die Beziehung zwischen  $\operatorname{spur}(\mathbf{G}_\mathbf{X}^{-1} \mathbf{L}_\mathbf{X})$  und  $H$  folgt aus (4.27)<sub>1</sub>. Mit diesem Zusammenhang wird der Beweis weiter auf der Grundlage der Variationsrechnung geführt. Notwendige Bedingung für ein Extremum der Inhalte

$$A_\varepsilon(\mu) = \iint_{U_0} (\det(\mathbf{G}_\varepsilon))^{1/2} du^1 du^2$$

der Fläche  $\mathfrak{F}_\varepsilon$  ist  $\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} A_\varepsilon(\mu) \right|_{\varepsilon=0} = 0$  für alle (fest gewählten) zulässigen Funktionen  $\mu(\mathbf{u})$ .

Mit der vorausgesetzten Glattheit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ist

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} A_\varepsilon(\mu) \right|_{\varepsilon=0} &= \iint_{U_0} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\det(\mathbf{G}_\varepsilon))^{1/2} \right|_{\varepsilon=0} du^1 du^2 \\
&= -2 \iint_{U_0} \mu H (\det(\mathbf{G}_\mathbf{X}))^{1/2} du^1 du^2 \\
&= -2 \iint_{U_0} \mu(\mathbf{u}) H(\mathbf{u}) dF \stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Wählt man, abgesehen von einem beliebig kleinen Randstreifen, in dem  $\mu(\mathbf{u})$  gegen Null abfällt,  $\mu(\mathbf{u}) = H(\mathbf{u})$ , so folgt aus dieser Forderung  $H(\mathbf{u}) = 0$ . ■

**Bemerkung 4.38** Aus dem Beweis dieses Satzes folgt nur, dass die Fläche  $\mathfrak{F}_0$  ein "kritischer Punkt" bezüglich aller Variationen in Normalenrichtung ist, was nicht zwangsläufig bedeutet, dass  $A_\varepsilon$  für  $\varepsilon = 0$  ein lokales Minimum besitzt. In [Jost] wird jedoch gezeigt, dass die Bedingung (4.55) für genügend kleine Flächenstücke auch hinreichend für ein Minimum des Flächeninhaltes ist. Man definiert deshalb den Begriff Minimalfläche allgemein wie folgt:

**Definition 4.15** Eine Fläche heißt **Minimalfläche**, wenn ihre mittlere Krümmung  $H$  in jedem Flächenpunkt verschwindet:  $H = 0$ .

**Bemerkung 4.39** Der Fall  $H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$  tritt nur ein, wenn entweder  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  unterschiedliches Vorzeichen besitzen oder wenn  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  ist. Eine Minimalfläche kann nach den Betrachtungen zur Klassifizierung von Flächenpunkten im Abschnitt 4.5 deshalb nur aus hyperbolischen Punkten oder Flachpunkten bestehen. Ein Flächenstück, das elliptische oder parabolische Flächenpunkte enthält, kann keine Minimalfläche sein.

**Bemerkung 4.40** Als Ausgangspunkt zur systematischen Konstruktion von Minimalflächen kann die aus  $H = 0$  folgende Gleichung

$$2H \det(\mathbf{G}_\mathbf{x}) = G_{11}L_{22} + G_{22}L_{11} - 2G_{12}L_{12} = 0$$

dienen. Mit  $G_{ij} = (\mathbf{X}_{,i}, \mathbf{X}_{,j})$  und  $L_{ij} = (\mathbf{X}_{,ij}, \mathbf{N})$  entsteht eine Differenzialgleichung, die durch geeignete Randbedingungen zu ergänzen ist. An eine allgemeine Lösung dieses komplexen Problems auf analytischem Wege ist jedoch nicht zu denken. Man schränkt sich deshalb auf ausgewählte Klassen von Flächen ein. Unter Einbeziehung von Methoden der Funktionentheorie sind dazu geeignete Lösungsmethoden entwickelt worden (siehe [Jost], [Kühn]).

**Beispiel 4.25** Für eine Drehfläche mit der Parametrisierung

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} r(u^1) \cos(u^2) \\ r(u^1) \sin(u^2) \\ u^1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -\alpha \leq u^1 \leq \alpha \\ 0 \leq u^2 \leq 2\pi \end{array}$$

ergibt sich aus (4.48) mit  $h = u^1$  ( und damit  $\dot{h} = 1$  ) die mittlere Krümmung

$$H = \frac{\dot{r}^2 + 1 - r\ddot{r}}{2r(\dot{r}^2 + 1)^{3/2}}.$$

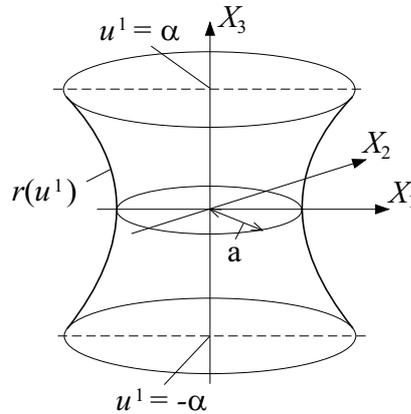
Die Bedingung  $H = 0$  ist deshalb äquivalent zu  $\dot{r}^2 + 1 - r\ddot{r} = 0$ . Dies ist die Differenzialgleichung der Kettenlinie mit der allgemeinen Lösung (siehe [MeVa]):

$$r(u^1) = a \cosh\left(\frac{u^1 + b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R}; \quad a > 0.$$

Der Parameter  $b$  beschreibt die Verschiebung der Fläche längs der Drehachse  $X_3$ . Nimmt man  $b = 0$ , so ist  $r(0) = a$  der "Tailenradius" der Drehfläche. Die erzeugte

Fläche

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} a \cosh(u^1/a) \cos(u^2) \\ a \cosh(u^1/a) \sin(u^2) \\ u^1 \end{pmatrix}$$



heißt *Kettenfläche* oder **Katenoid** und ist die einzige Minimalfläche unter den Drehflächen.

## 4.11. Flächenabwicklung

In diesem Abschnitt geht es um Klassen von Flächen mit gleicher innerer Geometrie. Alle Flächen einer solchen Klasse müssen die gleiche erste metrische Fundamentalform besitzen. Die Verbindung zwischen den Flächen wird durch Abbildungen hergestellt, die die Flächenmetrik nicht verändern.

Es seien  $\mathfrak{F}$  und  $\bar{\mathfrak{F}}$  Flächenstücke, zwischen denen die Abbildung

$$\Phi : \mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}} \quad \text{gemäß} \quad \mathbf{X} \in \mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X}) \in \bar{\mathfrak{F}}$$

besteht. Beide Flächenstücke werden mit einer regulären Parametrisierung

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} & : \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(u^1, u^2) & \mathbf{u} = (u^1, u^2)^T \in U & \quad \text{und} \\ \bar{\mathfrak{F}} & : \quad \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) & \bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}^1, \bar{u}^2)^T \in \bar{U} \end{aligned}$$

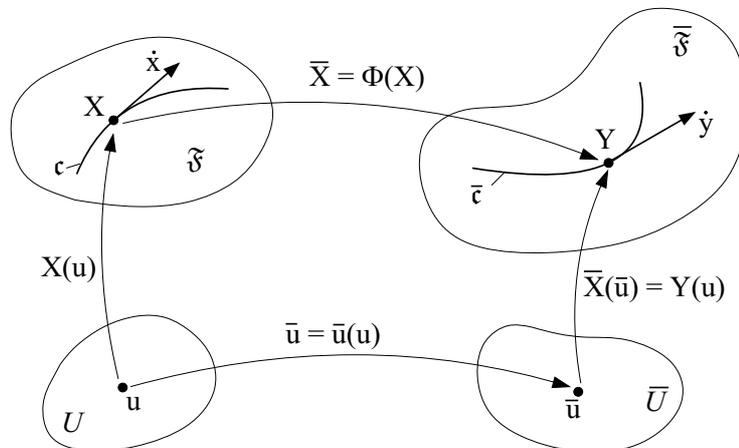
versehen, wobei die Parameterbereiche  $U, \bar{U}$  gemäß

$$\mathbf{u} = (u^1, u^2) \in U \rightarrow \bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2) \in \bar{U}$$

aufeinander abbildbar sind. Ist diese Abbildung entsprechend der Def. 4.2 ein Diffeomorphismus, so kann  $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = (\bar{u}^1, \bar{u}^2)^T$  als zulässige Umparametrisierung des Flächenstückes  $\bar{\mathfrak{F}}$  angesehen werden und es ergibt sich:

$$\Phi(\mathbf{X}(u^1, u^2)) = \bar{\mathbf{X}}(\bar{u}^1(u^1, u^2), \bar{u}^2(u^1, u^2)) \equiv \mathbf{Y}(u^1, u^2).$$

$\mathbf{Y}(u^1, u^2)$  ist dann eine Parametrisierung der Flächenpunkte  $\bar{\mathfrak{F}}$  von  $\bar{\mathfrak{F}}$  über dem gleichen Parameterbereich  $U$  wie die Parametrisierung  $\mathbf{X}(u^1, u^2)$  von  $\mathfrak{F}$ .



Es wird nun eine auf  $\mathfrak{F}$  verlaufende Flächenkurve  $\mathfrak{c}$  mit der Parametrisierung  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(t))$  ( $t \in I$ ) und deren Bildkurve  $\bar{\mathfrak{c}} = \Phi(\mathfrak{c})$  auf  $\bar{\mathfrak{F}}$  mit der Parametrisierung  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(\mathbf{u}(t)) = \Phi(\mathbf{x}(t))$  ( $t \in I$ ) eingeführt. Über die Tangentenvektoren

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{X}_{,i}\dot{u}^i \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{Y}_{,i}\dot{u}^i$$

ergeben sich für beide Kurven die Bogenelemente

$$ds(t) = \sqrt{(\mathbf{X}_{,i}, \mathbf{X}_{,j}) \dot{u}^i \dot{u}^j} dt = \sqrt{(\mathbf{G}_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{U}, \mathbf{U})} dt$$

$$d\bar{s}(t) = \sqrt{(\mathbf{Y}_{,i}, \mathbf{Y}_{,j}) \dot{u}^i \dot{u}^j} dt = \sqrt{(\bar{\mathbf{G}}_{\bar{\mathbf{X}}} \cdot \mathbf{U}, \mathbf{U})} dt$$

mit  $\mathbf{U} = (\dot{u}^1, \dot{u}^2)^T \in \mathbb{R}^2$ .  $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}$  und  $\bar{\mathbf{G}}_{\bar{\mathbf{X}}}$  bezeichnen die ersten metrischen Fundamentalgrößen der Flächenstücke  $\mathfrak{F}$  und  $\bar{\mathfrak{F}}$ .

**Definition 4.16** Die Abbildung  $\Phi: \mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}}$  heißt **isometrisch** und die Flächenstücke  $\mathfrak{F}, \bar{\mathfrak{F}}$  werden zueinander **isometrisch** genannt, wenn für alle Punktepaare  $\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$  die ersten metrischen Fundamentalformen gleich sind, d.h. wenn

$$\mathbf{G}_{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{G}}_{\bar{\mathbf{X}}}.$$

**Bemerkung 4.41** Wie in Bemerkung 4.10 gezeigt, ist die erste metrische Fundamentalf orm unabhängig von einer bestimmten Flächenparametrisierung, folglich ist diese Definition der Isometrie von Flächenstücken auch unabhängig von den gewählten Parametrisierungen  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  und  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}})$ . Andererseits genügt zum Nachweis der Isometrie, dass für alle Punktepaare  $\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$  Parametrisierungen  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  und  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{Y}(\mathbf{u})$  existieren, in denen die ersten metrischen Fundamentalgrößen  $\mathbf{G}_{\mathbf{X}} = \{(\mathbf{X}_{,i}, \mathbf{X}_{,i})\}$  und  $\bar{\mathbf{G}}_{\bar{\mathbf{X}}} = \{(\mathbf{Y}_{,i}, \mathbf{Y}_{,j})\}$  gleich sind:  $\mathbf{G}_{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{G}}_{\bar{\mathbf{X}}}$ .

**Bemerkung 4.42** Aus der Gleichheit der metrischen Fundamentalformen folgt, dass zueinander isometrische Flächen die gleiche innere Geometrie aufweisen und damit alle von einer Parametrisierung unabhängigen innergeometrischen Größen gleich sind. Über eine isometrische Abbildung  $\Phi$  aufeinander abgebildete Kurven oder Flächenstücke sind längen- bzw. inhaltsgleich. Insbesondere werden Geodäten auf  $\mathfrak{F}$  wieder zu Geodäten auf  $\bar{\mathfrak{F}}$ . Die GAUßsche Krümmung  $K$  für zueinander isometrische Flächen sind für jedes Punktepaar  $\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}}$  gleich.

**Bemerkung 4.43** Die Menge aller zueinander isometrischen Flächen bildet eine Äquivalenzklasse, d.h. es gilt:

- Jede Fläche ist zu sich selbst isometrisch (Reflexivität).
- Ist  $\mathfrak{F}_1$  zu  $\mathfrak{F}_2$  isometrisch, so ist auch  $\mathfrak{F}_2$  zu  $\mathfrak{F}_1$  isometrisch (Symmetrie).
- Sind  $\mathfrak{F}_1$  zu  $\mathfrak{F}_2$  und  $\mathfrak{F}_2$  zu  $\mathfrak{F}_3$  isometrisch, so ist auch  $\mathfrak{F}_1$  zu  $\mathfrak{F}_3$  isometrisch (Transitivität).

**Beispiel 4.26** Die verallgemeinerte Zylinderfläche (siehe Abschnitt 4.9, Regelflächen)

$$\mathfrak{Z} = \{ \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(u^1) + u^2 \mathbf{e}_3 \mid \mathbf{u} \in U \} \quad \text{mit } U = \left\{ \mathbf{u} = (u^1, u^2) \mid \begin{array}{l} u^1 \in I \subset \mathbb{R} \\ u^2 \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

mit der ebenen nach der Bogenlänge  $s = u^1$  parametrisierten doppelpunktfreien Kurve  $\mathbf{x}(u^1) = (x_1(u^1), x_2(u^1), 0)^T$  ( $u^1 \in I$ ) und der ebene Streifen

$$\mathfrak{S} = \left\{ \mathbf{X}(\mathbf{u}) = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_3 = (u^1, 0, u^2)^T \mid \mathbf{u} \in U \right\}$$

sind über die Abbildung

$$\Phi : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{Z} \quad \text{gemäß} \quad \mathbf{X}(\mathbf{u}) \in \mathfrak{S} \rightarrow \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) \in \mathfrak{Z} \quad \text{für alle } \mathbf{u} \in U$$

verbunden. Nach einfachen Rechnungen (unter Beachtung von  $\|\dot{\mathbf{x}}(u^1)\| = 1$ ) erhält man für die ersten Fundamentalgrößen  $\mathbf{G}_{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{G}}_{\bar{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Damit sind beide Flächenstücke isometrisch zueinander.

**Definition 4.17** Die Flächen  $\mathfrak{F}$  und  $\bar{\mathfrak{F}}$  heißen aufeinander **abwickelbar**, wenn es eine Familie von Flächen  $\mathfrak{F}_\lambda$  mit den regulären Parametrisierungen  $\mathbf{X}_\lambda(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ;  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ ) gibt, so dass folgendes gilt:

- $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\alpha$  und  $\bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}_\beta$ .
- Die Parametrisierungen  $\mathbf{X}_\lambda(\mathbf{u})$  sind von  $\lambda$  stetig abhängig.
- Für beliebige Parameterwerte  $\lambda_1, \lambda_2 \in [\alpha, \beta]$  sind die Flächen  $\mathfrak{F}_{\lambda_1}$  und  $\mathfrak{F}_{\lambda_2}$  zueinander isometrisch.

Ein Flächenstück  $\mathfrak{F}$  ist auf ein anderes Flächenstück  $\overline{\mathfrak{F}}$  abwickelbar (man spricht auch davon, dass  $\mathfrak{F}$  in  $\overline{\mathfrak{F}}$  verbiegbar ist), wenn es eine Schar sich stetig ändernder untereinander isometrischer Flächen gibt, die die eine Fläche in die andere überführt. Man denke dabei z.B. an die Mantelfläche eines Zylinders, die aus einem ebenen rechteckigen Kartonstück entsteht indem zwei gegenüberliegende Seiten ohne Dehnung des Materials aneinander gefügt werden. Entscheidend ist, dass es zu keinen Verzerrungen der Flächenstücke kommt, da diese zu Veränderungen der Flächenelemente und folglich zu einer anderen Metrik führen würden. Um es praktisch auszudrücken, aufeinander abwickelbare Flächen müssen aus einer flexiblen Haut bestehen, die jedoch keine Verzerrungen zulässt, wie es z.B. mit einem Stück Papier oder Stahlblech möglich ist, wenn nicht zu große Kräfte bei der Verbiegung aufgewendet werden. Nicht zulässige Flächenverformungen im Sinne der Flächenabwicklung treten auf, wenn man eine aus Gummi gefertigte Fläche durch beliebig geformte kompakte Gegenstände einer Belastung aussetzt, in deren Folge sich die Gummihaut der Oberflächenform dieser Gegenstände anpasst.

**Beispiel 4.27** Die im Beispiel 4.26 eingeführte Zylinderfläche  $\mathfrak{Z}$  und der ebene Streifen  $\mathfrak{S}$  sind nicht nur isometrisch zueinander, sondern auch aufeinander abwickelbar. Um dies zu zeigen, wird eine Familie von Zylinderflächen  $\mathfrak{Z}_\lambda$  mit den Parametrisierungen

$$\mathbf{X}_\lambda(\mathbf{u}) = \mathbf{x}_\lambda(u^1) + u^2 \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{u} \in U; \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

konstruiert.  $\mathbf{x}_\lambda(u^1)$  sind ebene nach der Bogenlänge  $s = u^1$  parametrisierte Kurven und  $\mathbf{x}_1(u^1) \equiv \mathbf{x}(u^1)$  ( $u^1 \in I = (a, b)$ ) sei die erzeugende Kurve der Zylinderfläche  $\mathfrak{Z}$ . Nach den Ausführungen im Abschnitt 3.6 sind die Tangentenvektoren einer hinreichend glatten ebenen Kurve  $\mathbf{x}(u^1)$  stets in der Form

$$\mathbf{t}(u^1) = \dot{\mathbf{x}}(u^1) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma(u^1)) \\ \sin(\gamma(u^1)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit einer wenigstens stetigen Winkelfunktion  $\gamma(u^1)$  darstellbar (siehe (3.20)). Ausgehend von dieser Schreibweise werden die Tangentenvektoren  $\mathbf{t}_\lambda(u^1)$  der Kurvenschar  $\mathbf{x}_\lambda(u^1)$  wie folgt definiert:

$$\mathbf{t}_\lambda(u^1) = \dot{\mathbf{x}}_\lambda(u^1) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda\gamma(u^1)) \\ \sin(\lambda\gamma(u^1)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist dann  $\mathbf{t}_1(u^1) = \dot{\mathbf{x}}_1(u^1) = \dot{\mathbf{x}}(u^1)$  und  $\mathbf{t}_0(u^1) = \mathbf{e}_1$  sowie  $\|\mathbf{t}_\lambda(u^1)\| = 1$  für  $0 \leq \lambda \leq 1$  und  $a < u^1 < b$ . Durch Integration über  $\mathbf{t}_\lambda(u^1)$  ergeben sich nach (3.22) die Kurvenparametrisierungen

$$\mathbf{x}_\lambda(u^1) = \lambda \mathbf{x}(a) + (1 - \lambda) a \mathbf{e}_1 + \int_a^{u^1} \mathbf{t}_\lambda(\tau) d\tau \quad \begin{matrix} 0 \leq \lambda \leq 1 \\ a < u^1 < b \end{matrix}.$$

Die Kurven  $\mathbf{x}_\lambda(u^1)$  sind nach der Bogenlänge parametrisiert und  $\mathbf{x}_1(u^1) = \mathbf{x}(u^1)$ ,  $\mathbf{x}_0(u^1) = u^1 \mathbf{e}_1$ . Für die mit diesen Kurven definierten Parametrisierungen  $\mathbf{X}_\lambda(\mathbf{u})$  der

Zylinderflächen  $\mathfrak{Z}_\lambda$  gilt folgendes:

- a)  $\mathbf{X}_1(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{X}_0(\mathbf{u}) = \mathbf{X}(\mathbf{u})$ , folglich ist  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1$  und  $\mathfrak{S} = \mathfrak{Z}_0$ .  
 b) Die Tangentenvektoren  $\mathbf{t}_\lambda(u^1)$  und damit auch  $\mathbf{x}_\lambda(u^1)$  sind stetig von  $\lambda$  abhängig. Daraus folgt die stetige Abhängigkeit der Parametrisierungen  $\mathbf{X}_\lambda(\mathbf{u})$  von  $\lambda$ .  
 c) Wegen  $\|\mathbf{t}_\lambda(u^1)\| = \|\dot{\mathbf{x}}_\lambda(u^1)\| = 1$  für alle  $\lambda$  und  $u^1 \in I$  ergibt sich für die metrischen Fundamentalgrößen  $\mathbf{G}_{\mathbf{x}_\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und damit deren Unabhängigkeit von  $\lambda$ .

Aus a) - c) folgt die Abwickelbarkeit der Zylinderfläche  $\mathfrak{Z}$  auf den Streifen  $\mathfrak{S}$ .

**Bemerkung 4.44** *Aufeinander abwickelbare Flächen sind insbesondere zueinander isometrisch. Alle in den Bemerkungen 4.41 -4.43 genannten Eigenschaften für zueinander isometrische Flächen sind in gleicher Weise auch für aufeinander abwickelbare Flächen und die damit verbundene Flächenschar zutreffend. Hervorzuheben ist, dass sich aus der Gleichheit innergeometrischer Größen über das Theorema egregium (Satz 4.5) die Gleichheit der GAUßschen Krümmung  $K$  aufeinander abwickelbarer Flächen ergibt. Flächen mit verschiedener GAUßscher Krümmung können nicht ineinander verbiegt sein. Ein Flächenstück der Einheitssphäre  $S^2$  mit  $K = 1$  (siehe Beispiel 4.14) kann deshalb nicht auf die Ebene ( $K = 0$ ) abgewickelt werden. Allgemeiner: Flächen mit elliptischen oder hyperbolischen Punkten sind nicht auf die Ebene abwickelbar. Dagegen sind neben Zylinderflächen auch Kegel- und Tangentenflächen (allgemein Torsen) auf die Ebene abwickelbar (siehe [Kühn] S. 60/61). Ein Beispiel zu nicht ebenen aufeinander abwickelbaren Flächen wird im Folgenden behandelt.*

**Beispiel 4.28** *Das im Beispiel 4.25 entwickelte Katenoid mit der Parametrisierung*

$$\mathbf{X}_K(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} a \cosh(u^1/a) \cos(u^2) \\ a \cosh(u^1/a) \sin(u^2) \\ u^1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} u^1 \in \mathbb{R} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{array}$$

und die Wendelfläche (Beispiel 4.24 Formel (4.54) mit  $R = \beta = a$ , der zulässigen Parametertransformation  $u^1 \rightarrow u^2 - \frac{\pi}{2}$ ,  $u^2 \rightarrow \sinh(u^1/a)$  und unter Beachtung von  $\cos(u^2 - \frac{\pi}{2}) = \sin(u^2)$ ,  $\sin(u^2 - \frac{\pi}{2}) = -\cos(u^2)$ )

$$\mathbf{X}_W(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} a \sinh(u^1/a) \sin(u^2) \\ -a \sinh(u^1/a) \cos(u^2) \\ a(u^2 - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} u^1 \in \mathbb{R} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{array}$$

sind aufeinander abwickelbar. Zum Nachweis werden die Parametrisierungen

$$\mathbf{X}_\lambda(u^1, u^2) = \cos(\lambda) \mathbf{X}_K(u^1, u^2) + \sin(\lambda) \mathbf{X}_W(u^1, u^2) \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$$

einer von  $\lambda$  abhängigen Flächenschar eingeführt. Dann gilt:

- a)  $\mathbf{X}_0(\mathbf{u}) = \mathbf{X}_K(\mathbf{u})$  und  $\mathbf{X}_{\pi/2}(\mathbf{u}) = \mathbf{X}_W(\mathbf{u})$ .  
 b)  $\mathbf{X}_\lambda(\mathbf{u})$  ist stetig von  $\lambda$  abhängig.

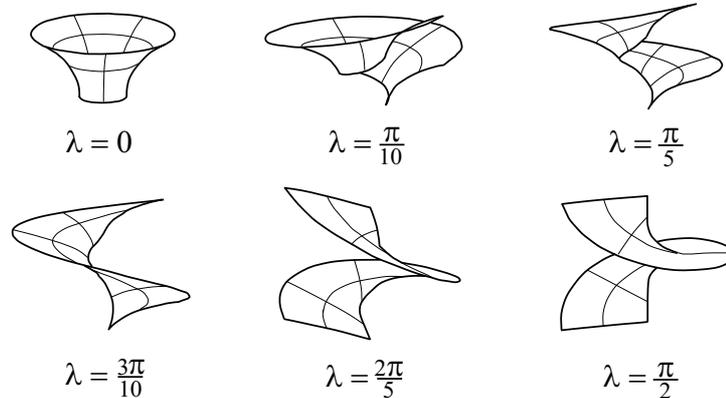
c) Mit den Tangentebasisvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\lambda,1} &= \cos(\lambda) \begin{pmatrix} \sinh(u^1/a) \cos(u^2) \\ \sinh(u^1/a) \sin(u^2) \\ 1 \end{pmatrix} + \sin(\lambda) \begin{pmatrix} \cosh(u^1/a) \sin(u^2) \\ -\cosh(u^1/a) \cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}_{\lambda,2} &= \cos(\lambda) \begin{pmatrix} -a \cosh(u^1/a) \sin(u^2) \\ a \cosh(u^1/a) \cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\lambda) \begin{pmatrix} a \sinh(u^1/a) \cos(u^2) \\ a \sinh(u^1/a) \sin(u^2) \\ a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

folgt für die ersten metrischen Fundamentalgrößen

$$\mathbf{G}_{\mathbf{X}_\lambda} = \begin{pmatrix} (\mathbf{X}_{\lambda,1}, \mathbf{X}_{\lambda,1}) & (\mathbf{X}_{\lambda,1}, \mathbf{X}_{\lambda,2}) \\ (\mathbf{X}_{\lambda,2}, \mathbf{X}_{\lambda,1}) & (\mathbf{X}_{\lambda,2}, \mathbf{X}_{\lambda,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2(u^1/a) & 0 \\ 0 & a^2 \cosh^2(u^1/a) \end{pmatrix}.$$

Nach Def. 4.17 folgt mit a) - c) die Abwickelbarkeit des Katenoids auf die Wendelfläche. In Abb. 4.36 sind einige Phasen dieser Abwicklung für Parameterwerte  $u^1 \geq 0$  dargestellt.



**Bemerkung 4.45** Die Isometrie zweier Flächen ist für deren Abwickelbarkeit notwendig aber im Allgemeinen nicht hinreichend. Deshalb wird in der Def. 4.17 gefordert, dass aufeinander abwickelbare Flächen über eine Folge sich stetig ändernder isometrischer Flächen verbunden sein müssen. Haben beide Flächen jedoch eine GAUßsche Krümmung  $K \leq 0$ , so ist die Isometrie auch hinreichend für deren Abwickelbarkeit (siehe [Stru]). Die Flächen in den Beispielen 4.27 und 4.28 erfüllen diese Bedingung. Die Abwickelbarkeit der angesprochenen Flächen in diesen Beispielen kann deshalb auch mit dem, im Vergleich zur Konstruktion stetiger isometrischer Flächenfolgen, weniger aufwändigen Nachweis der Flächenisometrie gezeigt werden.

## 4.12. Satz von GAUß und BONNET

Der Satz von HOPF (siehe Abschnitt 3.8) sichert die Invarianz der (integralen) Gesamtkrümmung einer einfach geschlossenen Kurve gegenüber orientierungserhaltenden hinreichend glatten homöomorphen Transformationen. Eine ähnliche Aussage auch für Flächen ist Inhalt des Satzes von GAUß und BONNET. In einer freien Interpretation sagt dieser Satz folgendes aus: Hält man einen beliebig schmalen Randstreifen,

der eine Fläche  $\mathfrak{F}$  berandet, fest, so kann die Form der Fläche im übrigen (inneren) Bereich homöomorph in eine andere Form transformiert werden, ohne dass sich die Gesamtkrümmung, d.h. der integrale Wert der GAUßschen Krümmung, ändert. Damit ist die Gesamtkrümmung bei festgehaltenem Randstreifen invariant gegenüber der sonstigen Flächenform. Das, was an positiver Flächenkrümmung hinzukommt, muss an anderer Stelle zwangsläufig als negative Krümmung auftreten. Aber es gilt noch mehr: Die Gesamtkrümmung über einer kompakten Fläche ohne Rand (z.B. die glatte Oberfläche eines kompakten Körpers) ist proportional zur EULER-Charakteristik der Fläche, was nochmals die Invarianz gegenüber homöomorphen Abbildungen unterstreicht.

**Definition 4.18** *Es sei*

$$\mathfrak{F} = \{ \mathbf{X} \mid \mathbf{X} = \mathbf{X}(u^1, u^2); (u^1, u^2) \in U \}$$

eine  $C^2$ -Fläche und  $B \subset U$  eine kompakte (d.h. abgeschlossene und beschränkte) Menge mit der einfach geschlossenen, positiv orientierten, stückweise glatten  $C^2$ -Randkurve

$$\partial B = \bigcup_{j=1}^m \partial B_j = \{ \mathbf{u} = (u^1, u^2) \in U \mid \mathbf{u} = \mathbf{g}(t); t \in I \}$$

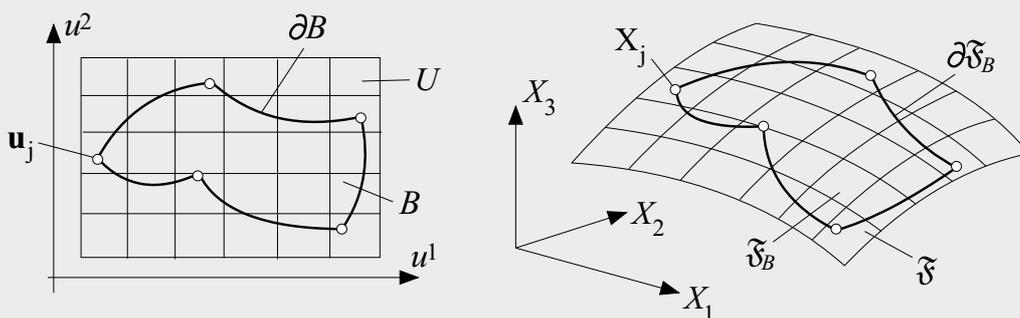
und den Eckpunkten  $\mathbf{u}_j = \mathbf{g}(t_j) \in \partial B$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Das auf  $B$  eingeschränkte Flächenstück

$$\mathfrak{F}_B = \{ \mathbf{X} \mid \mathbf{X} = \mathbf{X}(u^1, u^2); (u^1, u^2) \in B \} \subset \mathfrak{F}$$

heißt **reguläre  $C^2$ -Fläche mit dem stückweise glatten Rand**

$$\partial \mathfrak{F}_B = \bigcup_{j=1}^m \partial \mathfrak{F}_{B_j}, \quad \partial \mathfrak{F}_{B_j} = \mathbf{X}(\partial B_j).$$

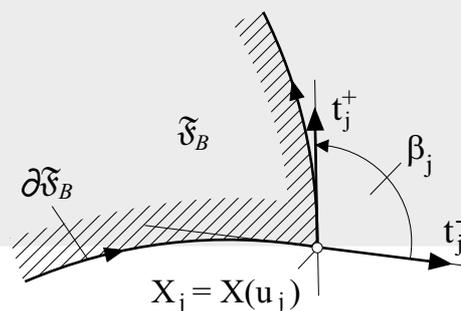


In den Eckpunkten  $\mathbf{X}_j = \mathbf{X}(\mathbf{u}_j)$  der Fläche  $\mathfrak{F}_B$  sind die positiv orientierten Außenwinkel  $\beta_j$  gemäß

$$\beta_j = \angle(\mathbf{t}_j^-, \mathbf{t}_j^+) \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{t}_j^\pm = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (h > 0)}} \frac{d}{dt} \mathbf{X}(\mathbf{g}(t)) \Big|_{t=t_j \pm h}$$

definiert.



**Satz 4.11 (Integralformel von GAUß und BONNET)**

$\mathfrak{F}_B$  sei eine reguläre  $C^2$ -Fläche mit stückweise glattem Rand  $\partial\mathfrak{F}_B = \bigcup_{j=1}^m \partial\mathfrak{F}_{Bj}$ . Die GAUßsche Krümmung  $K$  auf  $\mathfrak{F}_B$ , die geodätischen Krümmungen  $k_{gj}$  auf den Randstücken  $\partial\mathfrak{F}_{Bj}$  und die Außenwinkel  $\beta_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) seien bekannt. Dann gilt:

$$\int_{\mathfrak{F}_B} K \, dF + \sum_{j=1}^m \int_{\partial\mathfrak{F}_{Bj}} k_{gj}(s) \, ds + \sum_{j=1}^m \beta_j = 2\pi.$$

**Bemerkung 4.46** Wie im Vorspann zu diesem Abschnitt schon erwähnt, kann diese Formel wie folgt interpretiert werden: Hält man einen beliebig schmalen Randstreifen von  $\mathfrak{F}_B$  fest (damit werden die Winkel  $\beta_j$  und die geodätischen Krümmungen  $k_{gj}$  nicht geändert) und deformiert das Innere von  $\mathfrak{F}_B$  diffeomorph zu einer regulären  $C^2$ -Fläche  $\tilde{\mathfrak{F}}_B$ , so haben  $\mathfrak{F}_B$  und  $\tilde{\mathfrak{F}}_B$  die gleiche Gesamtkrümmung  $\int_{\tilde{\mathfrak{F}}_B} K \, dF$ .

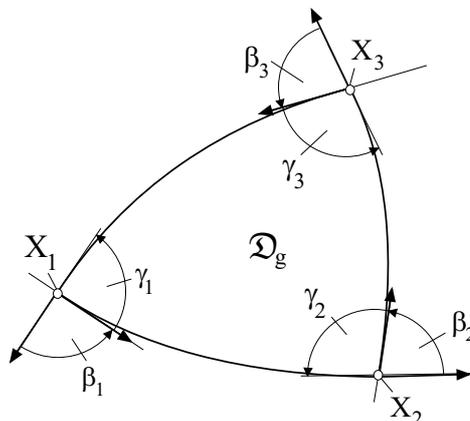
**Folgerung 4.1** Ist  $\mathfrak{F}_B$  ein sogenanntes geodätisches  $m$ -Eck, d.h., die Randstücke ( $j = 1, \dots, m$ ) sind Geodäten der Fläche  $\mathfrak{F}$ , dann ist  $k_{gj} = 0$  und man erhält für die Gesamtkrümmung des auf  $\mathfrak{F}$  liegenden Flächenstückes  $\mathfrak{F}_B$ :

$$\int_{\mathfrak{F}_B} K \, dF = 2\pi - \sum_{j=1}^m \beta_j.$$

Dieser Zusammenhang wurde für geodätische Dreiecke  $\mathfrak{D}_g$  schon von C.F. GAUß (**Theorema Elegantissimum**) bewiesen:

$$\int_{\mathfrak{D}_g} K \, dF = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \pi,$$

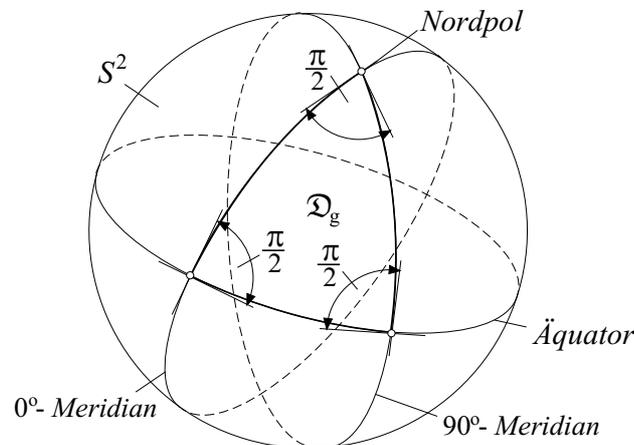
wobei  $\gamma_i = \pi - \beta_i$  die Innenwinkel des Dreiecks sind (siehe Abb. 4.39).



Ist  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  die Summe der Innenwinkel des geodätischen Dreiecks, so ergeben sich folgende Fälle:

1.  $K = 0$  :  $\mathfrak{D}_g$  liegt dann z.B. in einer Ebene oder auf einem Zylindermantel und man erhält das bekannte Resultat  $\gamma = \pi$ .
2.  $K > 0$  : In diesem Fall ist die Summe der Innenwinkel stets größer als  $\pi$ :  $\gamma > \pi$ . Ist z.B.  $\mathfrak{D}_g$  ein Oktant der Einheitssphäre  $S^2$ , d.h.,  $\mathfrak{D}_g$  wird vom Großkreis des Äquators und den  $0^\circ$ - sowie  $90^\circ$ -Meridianlinien begrenzt, so erhält man mit

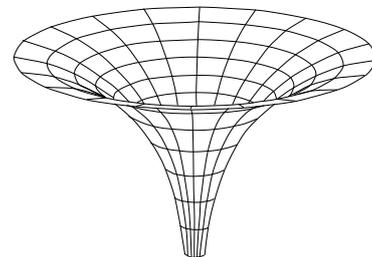
$$K = 1 \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{D}_g} K dF = \frac{1}{8} (4\pi) = \frac{\pi}{2} \quad \text{die Innenwinkelsumme} \quad \gamma = \frac{3}{2}\pi.$$



Wegen  $\int_{\mathfrak{D}_g} K dF \leq \int_{S^2} K dF = 4\pi$  ist  $\gamma$  nach oben durch  $3\pi$  beschränkt.

3.  $K < 0$  : Die Winkelsumme  $\gamma$  eines geodätischen Dreiecks ist dann stets  $< \pi$ . Diese Eigenschaft besitzen z.B. geodätische Dreiecke auf einer Pseudosphäre mit der Parametrisierung:

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} a \exp(u^1) \cos(u^2) \\ a \exp(u^1) \sin(u^2) \\ \int_0^{u^1} \sqrt{1 - a^2 \exp(2t)} dt \end{pmatrix} \quad (a > 0)$$



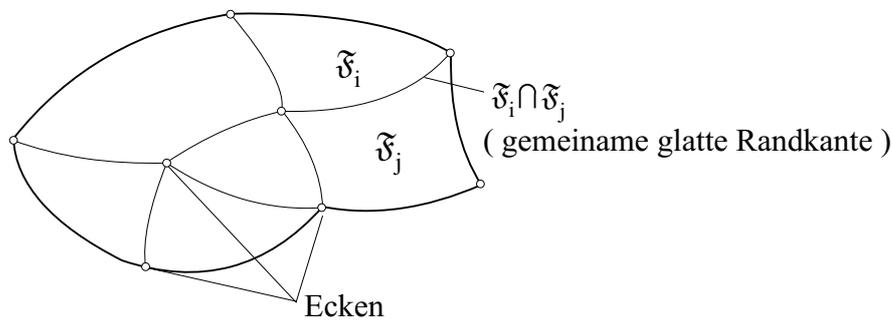
Die Gaußsche Krümmung dieser Fläche ist  $K = -1$ .

Die Integralformel von GAUß und BONNET bildet den Ausgangspunkt zur Ableitung globaler Aussagen über Flächen ohne Rand. Im Allgemeinen wird sich eine Fläche ohne Rand nicht durch eine einzige Parametrisierung darstellen lassen. Im Folgenden wird

deshalb unter einer kompakten  $C^2$ -Fläche ohne Rand die Vereinigung endlich vieler regulärer  $C^2$ -Flächen  $\mathfrak{F}_i$  mit stückweise glattem Rand verstanden:

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{F}_i \quad \text{und} \quad \partial\mathfrak{F} = \emptyset.$$

Dabei sollen sich die inneren Bereiche dieser Teilflächen nicht überlappen und im Falle  $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j \neq \emptyset$  ein stückweise glattes gemeinsames Randkurvenstück entstehen. Ein durchgängig glattes gemeinsames  $C^2$ -Randkurvenstück von  $\mathfrak{F}_i$  und  $\mathfrak{F}_j$  heißt **Kante der Fläche**  $\mathfrak{F}$ . Die Ecken der Randkurven, die auch die Kanten begrenzen, nennt man **Ecken der Fläche**  $\mathfrak{F}$  (siehe Abb. 4.42).



**Satz 4.12 (GAUß und BONNET)**

$\mathfrak{F}$  sei eine kompakte orientierte  $C^2$ -Fläche ohne Rand mit der GAUßschen Krümmung  $K$ , dann gilt

$$\int_{\mathfrak{F}} K \, dF = 2\pi\chi(\mathfrak{F})$$

mit der **EULER-Charakteristik**  $\chi(\mathfrak{F})$  der Fläche  $\mathfrak{F}$ .  $\chi(\mathfrak{F})$  wird aus der Formel

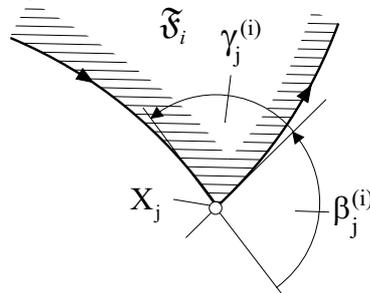
$$\chi(\mathfrak{F}) = e - k + n$$

berechnet, wobei  $n$  die Zahl der Teilflächen  $\mathfrak{F}_i$ ,  $k$  die Zahl der Kanten und  $e$  die Zahl der Ecken von  $\mathfrak{F}$  benennen.

**Beweis.** (skizziert) Aus der Orientierbarkeit von  $\mathfrak{F}$  ergibt sich, dass Randkurven benachbarter Teilflächen jeweils in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden können. Für jede Teilfläche  $\mathfrak{F}_i$  gilt die Integralformel von GAUß und BONNET. Addiert man alle Formeln über die Teilflächen auf, so kürzen sich, da  $\mathfrak{F}$  geschlossen ist, die Randintegrale über die geodätischen Krümmungen heraus und es entsteht die Gleichung:

$$\int_{\mathfrak{F}} K \, dF = 2\pi n - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \beta_j^{(i)}.$$

$\beta_j^{(i)}$  ist der  $j$ -te Außenwinkel am Eckpunkt  $\mathbf{X}_j$  der Teilfläche  $\mathfrak{F}_i$  und damit ist  $\gamma_j^{(i)} = \pi - \beta_j^{(i)}$  der zugehörige Innenwinkel am Punkt  $\mathbf{X}_j$  zur Teilfläche  $\mathfrak{F}_i$  (siehe Abb. 4.43).



Die Summe aller Innenwinkel an einer Ecke ist  $2\pi$ . Summiert über alle Ecken ergibt sich damit

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \gamma_j^{(i)} = 2\pi e.$$

Da die Zahl der Ecken und Kanten jeder Teilfläche gleich ist und jede Kante beim Aufsummieren genau zweimal auftritt, ist  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \pi = 2k\pi$ . Damit ergibt sich:

$$2\pi n - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \beta_j^{(i)} = 2\pi n - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (\pi - \gamma_j^{(i)}) = 2\pi (n - k + e) = 2\pi \chi(\mathfrak{F}).$$

■

**Bemerkung 4.47** Die **EULER-Charakteristik**  $\chi(\mathfrak{F})$  ist **unabhängig von der Art der Zerlegung** von  $\mathfrak{F}$  in Teilflächen  $\mathfrak{F}_i$  und damit eine **topologische Invariante**.

Insbesondere gilt der **Flächensatz der Topologie**: Zwei kompakte orientierte Flächen ohne Rand sind genau dann homöomorph zueinander (d.h., es besteht eine eindeutige stetige Abbildung, deren Inverse ebenfalls stetig ist), wenn sie die gleiche EULER-Charakteristik besitzen.

Der Satz von GAUß und BONNET kann deshalb wie folgt interpretiert werden: Alle homöomorph aufeinander abbildbaren kompakten orientierten  $C^2$ -Flächen ohne Rand besitzen die gleiche GAUßsche Gesamtkrümmung.

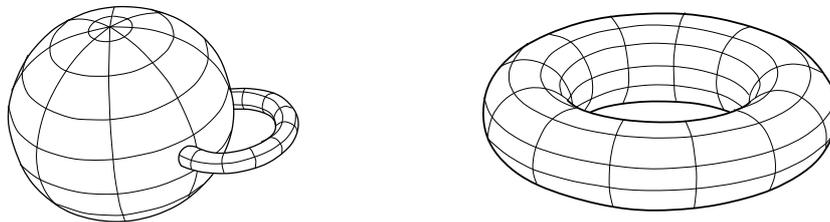
**Beispiel 4.29** (Beispiele zur EULER-Charakteristik)

1. Die geschlossene Oberfläche  $S^2 = \partial K^2$  einer Kugel kann als Vereinigung von  $n = 8$  Oktanten dargestellt werden. Dabei ergeben sich 12 Kanten und 6 Ecken, die zu einer EULER-Charakteristik  $\chi(S^2) = 6 - 12 + 8 = 2$  führen. Alle zu  $S^2$  homöomorphen Flächen besitzen die gleiche EULER-Charakteristik. Dazu gehören insbesondere das Ellipsoid, aber auch alle konvexen Polyeder.

2. Schneidet man in  $S^2$  zwei kreisförmige Löcher und verschweißt die beiden Begrenzungskurven eines gekrümmten Zylindermantels endlicher Länge mit den Rändern dieser Löcher, so entsteht eine Fläche  $S_1^2$  (siehe Abb. 4.44) mit der EULER-Charakteristik  $\chi(S_1^2) = 0$ .

Der Nachweis ist wie folgt zu führen: Auf  $S^2$  wählt man zunächst eine solche Zerlegung in Teilflächen, in der die beiden herausgeschnittenen kreisförmigen Flächen enthalten sind und durch jeweils eine geschlossene kreisförmige Kante mit einer Ecke begrenzt werden. Nach Entfernung der beiden Kreisflächen bleibt die Zahl der Ecken und Kanten unverändert, so dass die verbleibende Fläche die Charakteristik  $\chi(S^2) - 2 = 0$  aufweist. Den Zylindermantel kann man sich als eine Fläche vorstellen, die durch eine Mantellinie als Kante getrennt ist. Diese Kante wird durch zwei Ecken begrenzt, die auf den beiden den Zylindermantel abschließenden Kreislinien sich befinden. Verbindet man nun die beiden Kreislinien des Zylindermantels mit denen auf  $S^2$  in der Weise, dass die Punkte zusammenfallen, so wird die vorhandene Struktur lediglich um eine Fläche und eine Kante erweitert. Demzufolge ist  $\chi(S_1^2) = 0 - 1 + 1 = 0$ .

Die gleiche EULER-Charakteristik hat auch die Oberfläche eines Torus' (siehe Abb. 4.45) und eines Quaders, in dessen Mitte ein Bereich ausgestanzt ist. Modifiziert man letztere durch entsprechende "Abrundung der Ecken und Kanten", so entsteht eine durchgängige  $C^2$ -Fläche mit der gleichen EULER-Charakteristik.



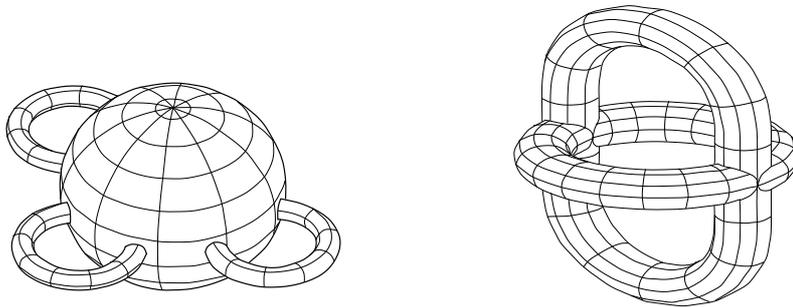
3. Das Anbringen eines "Henkels" an  $S^2$  wie unter 2. beschrieben kann mehrfach, z.B.  $g$ -fach, erfolgen. Die Oberfläche  $S_g^2$  der dann entstehenden Struktur hat die EULER-Charakteristik

$$\chi(S_g^2) = 2 - 2g.$$

Der Nachweis ist über vollständige Induktion zu führen. Bemerkt sei dazu, dass beim Anfügen eines Henkels zwei Flächen verloren gehen und jeweils eine Kante und Zylindermantelfläche hinzukommen, womit die EULER-Charakteristik um den Wert 2 sinkt.

Flächen ohne Rand mit der EULER-Charakteristik  $2 - 2g$  heißen Flächen vom Geschlecht  $g$ . Demzufolge besitzt  $S^2$  das Geschlecht 0 und ein Torus das Geschlecht 1.  $S^2$  mit drei Henkel und ein gestreckter Torus mit zwei Henkel besitzen

das Geschlecht  $g = 3$  (Abbildungen 4.46 und 4.47).

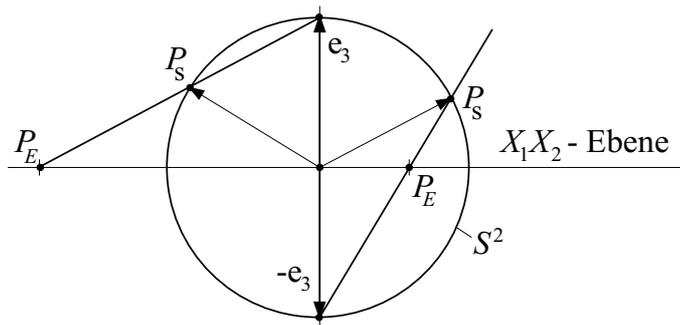


### Folgerung 4.2

1. Besitzt eine geschlossene Fläche nirgends eine positive Krümmung, so ist  $\chi(\mathfrak{F}) \leq 0$  und folglich kann  $\mathfrak{F}$  nicht homöomorph zu  $S^2$  sein.
2. Eine bemerkenswerte Folgerung aus dem Satz von GAUß und BONNET ist, dass die GAUßsche Gesamtkrümmung  $\int_{\mathfrak{F}} K \, dF$  nicht von der Metrik abhängt, obwohl zur Berechnung der GAUßschen Krümmung  $K$  (d.h. der Dichtefunktion im Integral) als einer innergeometrischen Größe unbedingt eine Metrik erforderlich ist. Es kann deshalb auf einer Fläche ohne Rand mit  $\chi(\mathfrak{F}) \neq 0$ , auf der es dann stets irgendeinen Punkt mit  $K \neq 0$  gibt, keine Metrik mit verschwindender Krümmung existieren.

## 4.13. Aufgaben

1. Für die Einheitssphäre  $S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$  sind reguläre Parametrisierungen zu den Flächenbereichen  $S_+^2 = S^2 / \{\mathbf{e}_3\}$  und  $S_-^2 = S^2 / \{-\mathbf{e}_3\}$  mit  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$  auf der Grundlage der stereografischen Projektion anzugeben.  
Hinweis: Man betrachte alle Geraden im  $\mathbb{R}^3$  mit dem Stützvektor  $\mathbf{e}_3$  (bzw.  $-\mathbf{e}_3$ ), die je einen Schnittpunkt  $P_E$  mit der  $X_1X_2$ -Ebene und  $P_S$  mit  $S^2$  besitzen. Die Zuordnung  $\pi_+ : S_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (bzw.  $\pi_- : S_-^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) gemäß  $P_S \in S^2 \rightarrow P_E \in \mathbb{R}^2$  heißt stereografische Projektion und bildet den Ausgangspunkt für die zu entwickelnde Parametrisierung (siehe Abb. 4.48).



2. Für die ENNEPER-Fläche mit der Parametrisierung

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 - \frac{1}{3}(u^1)^3 + u^1(u^2)^2 \\ u^2 - \frac{1}{3}(u^2)^3 + u^2(u^1)^2 \\ (u^1)^2 - (u^2)^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

sind die metrischen Fundamentalgrößen  $\mathbf{G}_\mathbf{x}$  und  $\mathbf{L}_\mathbf{x}$  herzuleiten und die Flächenpunkte zu klassifizieren.

Ist diese Fläche eine Minimalfläche?

3. Es sei  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ) die Parametrisierung einer Fläche, auf der eine nach der Bogenlänge  $s$  parametrisierte Kurve  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(s))$  verläuft. Mit  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s)$ , dem Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{N}(\mathbf{u}(s))$  und  $\mathbf{P}(s) = \mathbf{N}(\mathbf{u}(s)) \times \mathbf{t}(s)$  kann jedem Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(s)$  ein orthonormales Dreibein  $\{\mathbf{t}, \mathbf{N}, \mathbf{P}\}$  zugeordnet werden. Es ist eine den FRENETSchen Gleichungen entsprechende Ableitungsgleichung für  $\mathbf{x}(s)$  in der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{P}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

herzuleiten und die geometrische Bedeutung der Koeffizienten  $a_{ij}$  aufzudecken.

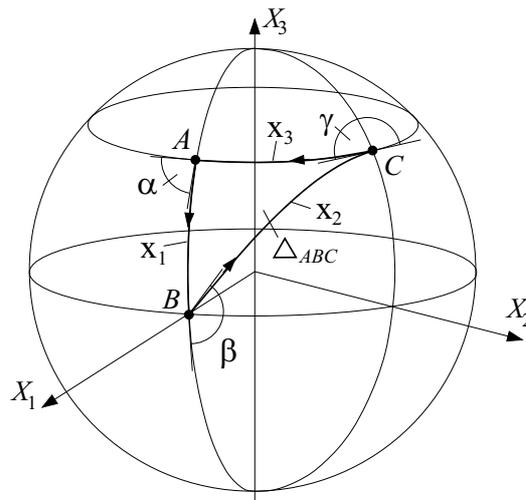
4. Zu folgenden Parametrisierungen von Flächen ( $\mathbf{f}$ ) sind die CHRISTOFFEL-Symbole  $\Gamma_{ij}^k$  zu bestimmen:
- $(\mathbf{f})$  wird erzeugt von einer  $C^2$ -Funktion  $g(u^1, u^2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Parametrisierung aus Beispiel 4.2.
  - $(\mathbf{f})$  ist eine Dehfläche mit der Parametrisierung (4.46).
5. Zu einer gegebenen Fläche mit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U$ ) sind Formeln für die geodätische Krümmung der Koordinatenlinien

$$\mathbf{x}_{c_1}(u^1) = \mathbf{X}(u^1, c_1) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_{c_2}(u^2) = \mathbf{X}(c_2, u^2)$$

zu entwickeln, die lediglich von der ersten metrischen Fundamentalgröße  $\mathbf{G}_\mathbf{x}(\mathbf{u})$  und den CHRISTOFFEL-Symbolen der Fläche abhängig sind. Daraus sind Ausdrücke für die geodätische Krümmung im Falle einer GAUßschen Flächenparametrisierung (siehe Def. 4.4) abzuleiten, die nur die Metrikoeffizienten enthalten.

6. Auf der Einheitssphäre  $S^2$  verlaufen die Kurven ( $\mathbf{c}_i$ ) ( $i = 1, 2, 3$ ) mit folgenden Parametrisierungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= (\sin(t), 0, \cos(t))^T & 0 < t < \pi \\ \mathbf{x}_2(t) &= \left( \cos(t), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t) \right)^T & -\pi < t < \pi \\ \mathbf{x}_3(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(t), \cos(t), 1)^T & -\pi < t < \pi. \end{aligned}$$



Diese Kurven schneiden sich in den Punkten  $A, B, C$  und bilden ein Dreieck  $\Delta_{ABC}$  auf  $S^2$  (siehe Abb. 4.49). Ist dieses Dreieck ein geodätisches Dreieck auf  $S^2$ ? Zu berechnen sind:

- Die Schnittpunkte  $A, B, C$  der Kurven.
- Die Außenwinkel  $\alpha, \beta, \gamma$  in den Eckpunkten des Dreiecks  $\Delta_{ABC}$ .
- Der Inhalt  $|\Delta_{ABC}|$  des Dreiecks  $\Delta_{ABC}$  auf  $S^2$ .

7. Ein Flächenstück sei mittels geodätischer Polarkoordinaten  $r, \varphi$  parametrisiert (siehe Bemerkung 4.31). Es ist zu zeigen, dass die GAUßsche Krümmung  $K$  nur vom Metrikkoeffizienten  $G_{22} = (\mathbf{X}_{,\varphi}, \mathbf{X}_{,\varphi})$  abhängig ist und mit der Formel

$$K = \frac{1}{2G_{22}} \left( \frac{1}{2G_{22}} \left( \frac{\partial G_{22}}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial^2 G_{22}}{\partial r^2} \right)$$

beschrieben wird.

- Die Gleichungen von GAUß und CODAZZI-MAINARDI sind aus den Integrabilitätsbedingungen (4.34) zu dem Differentialgleichungssystem  $\mathbf{Y}_{,k}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_k(\mathbf{u}) \mathbf{Y}(\mathbf{u})$  mit den Matrizen (4.35) herzuleiten.
- Es ist eine Schar von Abbildungen  $\mathbf{X}_\alpha(\mathbf{u})$  ( $\alpha \in I$ ) zu konstruieren, die eine Abwicklung des Kegelmantels  $X_3^2 = b^2(X_1^2 + X_2^2)$  mit  $0 < X_1^2 + X_2^2 < R^2$  ( $b, R > 0$ ) in die  $X_1X_2$ -Ebene realisiert.
- Gegeben sind Matrizen

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} R & T \\ T & S \end{pmatrix}$$

mit konstanten Koeffizienten  $A, B, C, R, S, T \in \mathbb{R}$ . Unter welchen Bedingungen an diese Koeffizienten bilden  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{L}$  die erste und zweite Fundamentalgröße einer Parametrisierung  $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eines Flächenstückes?

Es sind Beispiele für Flächen anzugeben, die konstante Fundamentalgrößen der angegebenen Form besitzen.

11. Es ist zu zeigen, dass die Wendelfläche mit der Parametrisierung

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = (u^2 \cos(u^1), u^2 \sin(u^1), \beta u^1)^T$$

eine Minimalfläche ist.

12. Es ist zu zeigen, dass für eine geschlossene Kurve, die auf der Mantelfläche eines Kreiszylinders verläuft und deren Tangente in jedem Punkt nicht parallel zur Meridianlinie der Mantelfläche im jeweiligen Punkt verläuft, die geodätische Gesamtkrümmung (integraler Wert über alle geodätischen Krümmungen längs der Kurve) verschwindet.



# A. Anhang

## A.1. Lösungen zu den Aufgaben aus 3.9

1. a) Mit  $ds = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt$  ist  $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|$  und

$$\begin{aligned}t'(s) &= \frac{dt}{ds} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \\t''(s) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{dt}{ds}\right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|}\right) \frac{dt}{ds} \\&= \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|}\right) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \frac{d}{dt} \left[(\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))^{-1/2}\right] \\&= -\frac{1}{2\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} (\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))^{-3/2} 2(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) \\&= -\frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^4} (\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)).\end{aligned}$$

Damit erhält man die Ableitungen von  $\mathbf{x}$  nach der Bogenlänge:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(s) &= \frac{d}{ds} \mathbf{x}(s) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{x}}(t) \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \\ \mathbf{x}''(s) &= \frac{d}{ds} \mathbf{x}'(s) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|}\right) \frac{dt}{ds} \\&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{(\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))^{1/2}}\right) \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \\&= \frac{\ddot{\mathbf{x}}(t) \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| - \dot{\mathbf{x}}(t) \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^{-1} (\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^2} \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \\&= \frac{\ddot{\mathbf{x}}(t) (\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - \dot{\mathbf{x}}(t) (\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^4} \\&= \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^4} (\dot{\mathbf{x}}(t) \times (\ddot{\mathbf{x}}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t))).\end{aligned}$$

Für die letzte Umformung wurde die GRASSMANN-Identität (2.1) verwendet.

b) Mit

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \\ c \end{pmatrix}; \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a \cos(t) \\ -b \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned}\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| &= (a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{1/2} = (b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2(t))^{1/2} \\ s(t) &= \int_0^t (b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2(\tau))^{1/2} d\tau \\ \mathbf{x}'(s) &= \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \\ \mathbf{x}''(s) &= \frac{-1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^2} \left[ \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \\ c \end{pmatrix} + \frac{(a^2 - b^2) \sin(t) \cos(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^2} \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ k(t) &= \frac{\|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3} = \frac{ab}{(b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2(t))^{3/2}}.\end{aligned}$$

Die Größe  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  heißt lineare Exzentrizität der Ellipse.

2. a)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= e^t \begin{pmatrix} a \cos(t) - a \sin(t) \\ a \sin(t) + a \cos(t) \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = e^t \sqrt{2a^2 + b^2} \\ s(t) &= \int_{-\infty}^t \sqrt{2a^2 + b^2} e^\tau d\tau = e^t \sqrt{2a^2 + b^2} \quad s(t) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \\ \Rightarrow t(s) &= \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2a^2 + b^2}} \right) \quad \text{und} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{s} \\ \mathbf{x}(s) &= \frac{s}{\sqrt{2a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \cos(t(s)) \\ a \sin(t(s)) \\ b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(s) &= \mathbf{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{2a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \cos(t(s)) - a \sin(t(s)) \\ a \sin(t(s)) + a \cos(t(s)) \\ b \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}''(s) &= \frac{a}{s\sqrt{2a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -\sin(t(s)) - \cos(t(s)) \\ \cos(t(s)) - \sin(t(s)) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{n}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin(t(s)) - \cos(t(s)) \\ \cos(t(s)) - \sin(t(s)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k(s) = \frac{\sqrt{2}a}{s\sqrt{2a^2 + b^2}} \\ \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b(\sin(t(s)) - \cos(t(s))) \\ -b(\cos(t(s)) + \sin(t(s))) \\ 2a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{n}'(s) = \frac{-1}{s\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(t(s)) - \sin(t(s)) \\ \cos(t(s)) + \sin(t(s)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w(s) = (\mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s)) = \frac{b}{s\sqrt{2a^2 + b^2}}$$

3. Es bestehen die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(s) &= \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{x}''(s) &= \mathbf{t}'(s) = k(s) \mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

und unter Verwendung der FRENETschen Formel  $\mathbf{n}'(s) = -k(s) \mathbf{t}(s) + w(s) \mathbf{b}(s)$  ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'''(s) &= k'(s) \mathbf{n}(s) + k(s) \mathbf{n}'(s) \\ &= -k^2(s) \mathbf{t}(s) + k'(s) \mathbf{n}(s) + k(s) w(s) \mathbf{b}(s). \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann  $s_0 = 0$  gesetzt werden. Mit

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0); \quad \mathbf{t}_0 = \mathbf{t}(0); \quad \mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(0); \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(0); \quad k_0 = k(0); \quad w_0 = w(0)$$

ist

$$\mathbf{x}'(0) = \mathbf{t}_0; \quad \mathbf{x}''(0) = k_0 \mathbf{n}_0; \quad \mathbf{x}'''(0) = -k_0^2 \mathbf{t}_0 + k_0' \mathbf{n}_0 + k_0 w_0 \mathbf{b}_0.$$

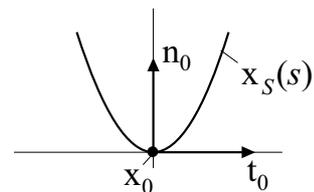
Die TAYLORsche Formel für  $\mathbf{x}(s)$  an der Stelle  $s = 0$  bis zum vierten Glied ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= \mathbf{x}(0) + \mathbf{x}'(0) s + \frac{1}{2} \mathbf{x}''(0) s^2 + \frac{1}{6} \mathbf{x}'''(0) s^3 + s^3 \delta(s) \\ &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{t}_0 s + \frac{1}{2} k_0 \mathbf{n}_0 s^2 + \frac{1}{6} (-k_0^2 \mathbf{t}_0 + k_0' \mathbf{n}_0 + k_0 w_0 \mathbf{b}_0) s^3 + s^3 \delta(s) \\ &= \mathbf{x}_0 + \left( s - \frac{1}{6} k_0^2 s^3 \right) \mathbf{t}_0 + \left( \frac{1}{2} k_0 s^2 + \frac{1}{6} k_0' s^3 \right) \mathbf{n}_0 + \frac{1}{6} k_0 w_0 s^3 \mathbf{b}_0 + s^3 \delta(s). \end{aligned}$$

Die Projektion von  $\mathbf{x}(s)$  auf die von  $\mathbf{t}_0$  und  $\mathbf{n}_0$  aufgespannte Schmiegeebene im Punkt  $\mathbf{x}_0$  ergibt:

$$\mathbf{x}_S(s) = \mathbf{x}_0 + s \mathbf{t}_0 + \frac{1}{2} k_0 s^2 \mathbf{n}_0 + s^2 \delta_S(s)$$

$$\text{mit } \lim_{s \rightarrow 0} \delta_S(s) = \mathbf{0}.$$

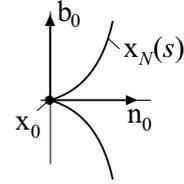


Vernachlässigt man für kleine  $s$  das Glied  $s^2 \delta_S(s)$ , so beschreibt die Projektionskurve  $\mathbf{x}_S(s)$  eine Parabel in der Schmiegeebene, deren Scheitelpunkt sich in  $\mathbf{x}_0$  befindet.

Die Projektion von  $\mathbf{x}(s)$  auf die von  $\mathbf{n}_0$  und  $\mathbf{b}_0$  aufgespannte Normalebene im Punkt  $\mathbf{x}_0$  ergibt:

$$\mathbf{x}_N(s) = \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2}k_0s^2\mathbf{n}_0 + \frac{1}{6}k_0w_0s^3\mathbf{b}_0 + s^2\delta_N(s)$$

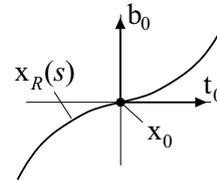
$$\text{mit } \lim_{s \rightarrow 0} \delta_N(s) = \mathbf{0}.$$



Verzichtet man für kleine  $s$  auf das Glied  $s^2\delta_N(s)$ , so beschreibt die Projektionskurve  $\mathbf{x}_N(s)$  eine NEILSche Parabel in der Normalebene (vorausgesetzt  $w_0 \neq 0$ ). Die Projektion von  $\mathbf{x}(s)$  auf die von  $\mathbf{t}_0$  und  $\mathbf{b}_0$  aufgespannte rektifizierende Ebene im Punkt  $\mathbf{x}_0$  ergibt:

$$\mathbf{x}_R(s) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{t}_0 + \frac{1}{6}k_0w_0s^3\mathbf{b}_0 + s^2\delta_R(s)$$

$$\text{mit } \lim_{s \rightarrow 0} \delta_R(s) = \mathbf{0}.$$



Verzichtet man auch hier für kleine  $s$  auf das Glied  $s^2\delta_R(s)$ , so beschreibt  $\mathbf{x}_R(s)$  in der rektifizierenden Ebene eine Kurve vom Typ einer kubischen Parabel (vorausgesetzt  $w_0 \neq 0$ ).

4. Mit

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}; \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = - \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}$$

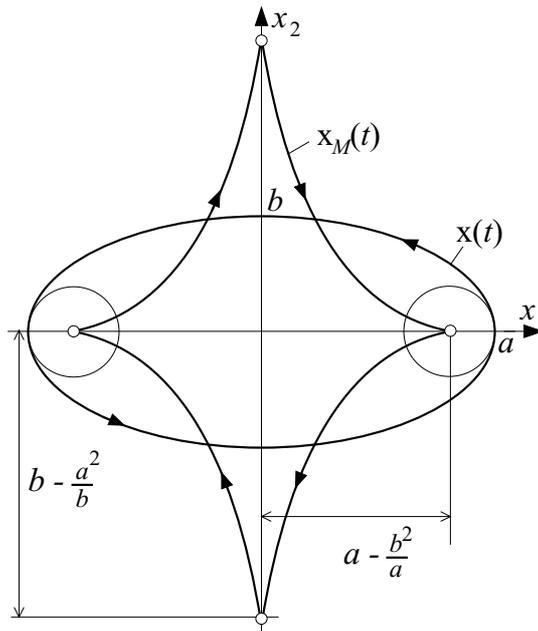
und  $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = (a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{1/2}$  erhält man

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{-1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \begin{pmatrix} b \cos(t) \\ a \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$k(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3} \begin{vmatrix} -a \sin(t) & -a \cos(t) \\ b \cos(t) & -b \sin(t) \end{vmatrix} = \frac{ab}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3}$$

und damit weiter

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_M(t) &= \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix} - \frac{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}{ab} \begin{pmatrix} b \cos(t) \\ a \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) \left( a - a \sin^2(t) - \frac{b^2}{a} \cos^2(t) \right) \\ \sin(t) \left( b - \frac{a^2}{b} \sin^2(t) - b \cos^2(t) \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^3(t) \left( a - \frac{b^2}{a} \right) \\ \sin^3(t) \left( b - \frac{a^2}{b} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



5. Für eine Schraubenlinie sind Krümmung und Windung konstant (siehe Beispiele 3.6 und 3.7):

$$k(s) \equiv k_0 = \frac{\alpha^2 R}{K^2}; \quad w(s) \equiv w_0 = \frac{\alpha \beta}{K^2} \quad \text{mit} \quad K^2 = R^2 \alpha^2 + \beta^2. \quad (\text{A.1})$$

Nach dem Hauptsatz der Kurventheorie können sich alle FRENET-Kurven mit der gleichen konstanten Krümmung  $k_0 > 0$  und Torsion  $w_0$  nur durch EUKLIDISCHE Bewegungen unterscheiden. Es muss deshalb nur noch gezeigt werden, dass für eine FRENET-Kurve mit konstanter Krümmung  $k_0 > 0$  und konstanter Torsion  $w_0$  stets Parameter  $\alpha, \beta, R$  angegeben werden können, die die Zusammenhänge (A.1) herstellen. Die Nebenbedingung  $K^2 = R^2 \alpha^2 + \beta^2$  kann zu

$$1 = R^2 \alpha^2 + \beta^2$$

normiert werden. Diese Normierung entspricht wegen  $t = s/K$  (siehe Beispiel 3.5) einer Kurvenparametrisierung nach der Bogenlänge  $s$ . Zusammen mit  $k_0 = \alpha^2 R$  und  $w_0 = \alpha \beta$  stehen dann drei Gleichungen für  $\alpha, \beta, R$  zur Verfügung. Wegen

$$c^2 = k_0^2 + w_0^2 = \alpha^2 (\alpha^2 R^2 + \beta^2) = \alpha^2$$

sind diese Gleichungen mit

$$\alpha = c; \quad \beta = \frac{w_0}{\alpha} = \frac{w_0}{c} \quad \text{und} \quad R = \frac{k_0}{\alpha^2} = \frac{k_0}{c^2}$$

erfüllt. Folglich gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Schraubenlinie mit der vorgegebenen Krümmung  $k_0$  und Torsion  $w_0$ .

6. Setzt man  $z(x) = \frac{dy}{dx}$ , so entsteht die gewöhnliche Differenzialgleichung 1. Ordnung in  $z(x)$ :

$$a \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + (z(x))^2},$$

deren allgemeine Lösung  $z(x) = \sinh\left(\frac{x}{a} + \alpha\right)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$  beliebig) ist. Wegen der Parallelität der Tangente an die Seilkurve in  $y(0)$  muss

$$0 = \frac{dy}{dx}(0) = z(0) = \sinh(\alpha)$$

und damit  $\alpha = 0$  sein. Weiter ist

$$y(x) = \int z(x) dx = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + \beta \quad \text{mit} \quad y(0) = a + \beta \stackrel{!}{=} a.$$

Die Seilkurve lässt sich also durch die reguläre Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x \\ a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

beschreiben.

7. Mit  $\mathbf{x}_M = \mathbf{x} + \frac{1}{k} \mathbf{n}$  und den Formeln (3.16) und (3.18) erhält man das angegebene Resultat.
8. Berechnung der Ableitungen von  $\mathbf{x}(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\varphi) &= \begin{pmatrix} \dot{r} \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) \\ \dot{r} \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}, \quad \ddot{r} = \frac{d^2r}{d\varphi^2} \\ \|\dot{\mathbf{x}}(\varphi)\| &= \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} \\ \Rightarrow ds &= \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi \quad \text{und} \quad \mathbf{t}(\varphi) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(\varphi)\|} \dot{\mathbf{x}}(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(\varphi) &= \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos(\varphi) - 2\dot{r} \sin(\varphi) - r \cos(\varphi) \\ \ddot{r} \sin(\varphi) + 2\dot{r} \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ k(\varphi) &= \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1}{\|\dot{\mathbf{x}}(\varphi)\|^3} = \frac{2\dot{r}^2 - r\ddot{r} + r^2}{(\dot{r}^2 + r^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

9. a) Mit  $\dot{r} = \frac{1}{\alpha} \exp\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)$  und  $\ddot{r} = \frac{1}{\alpha^2} \exp\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)$  ist

$$ds = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi = \frac{1}{\alpha} \exp\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) \sqrt{\alpha^2 + 1} d\varphi$$

und damit

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha} \int_{-\infty}^a \exp\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) d\varphi = \sqrt{1 + \alpha^2} \exp\left(\frac{a}{\alpha}\right) \\ k(\varphi) &= \frac{\alpha^3 \left[ \frac{2}{\alpha^2} \exp\left(\frac{2\varphi}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha^2} \exp\left(\frac{2\varphi}{\alpha}\right) + \exp\left(\frac{2\varphi}{\alpha}\right) \right]}{(\alpha^2 + 1)^{3/2} \exp\left(\frac{3\varphi}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \exp\left(-\frac{\varphi}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

b) Mit  $\dot{r} = \alpha$  und  $\ddot{r} = 0$  ist  $ds = \alpha\sqrt{1 + \varphi^2}d\varphi$  und damit

$$L = \alpha \int_0^a \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = \frac{\alpha}{2} \left[ a\sqrt{1 + a^2} + \ln \left( a + \sqrt{1 + a^2} \right) \right]$$

$$k(\varphi) = \frac{(2 + \varphi^2)}{\alpha(1 + \varphi^2)^{3/2}}.$$

10. a) Für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$  ist

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} R\varphi - a \sin(\varphi) \\ R - a \cos(\varphi) \end{pmatrix}; \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} R - a \cos(\varphi) \\ a \sin(\varphi) \end{pmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} a \sin(\varphi) \\ a \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$  für  $R = a$  und  $\varphi = 2k\pi$ . Die angegebene Parametrisierung ist im Falle  $0 < a < R$  für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$  regulär. Liegt der die Zykloide erzeugende Punkt auf der Peripherie des Kreises ( $a = R$ ), so besitzt die Kurve für die Parameterwerte  $\varphi = 2k\pi$  einen Knick und ist folglich an diesen Stellen nicht stetig differenzierbar.  
b) Mit

$$\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = \sqrt{(R - a \cos(\varphi))^2 + a^2 \sin^2(\varphi)} = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos(\varphi)}$$

$$\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1 = (R - a \cos(\varphi)) a \cos(\varphi) - a^2 \sin^2(\varphi) = aR \cos(\varphi) - a^2$$

erhält man

$$k(\varphi) = \frac{aR \cos(\varphi) - a^2}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos(\varphi))^{3/2}}$$

für  $\varphi \neq 2k\pi$  im Falle  $a = R$ .

c) Im Falle  $a = R$  ist  $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = R\sqrt{2(1 - \cos(\varphi))} = 2R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$  und damit

$$L = 2R \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 4R \left[ -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 8R.$$

11. a) (c) sei eine Böschungslinie, dann existiert ein vom Bogenlängenparameter  $s$  unabhängiger konstanter Vektor  $\mathbf{n}_E$  mit  $\|\mathbf{n}_E\| = 1$  und  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_E) = d = \text{const.}$  Mit der FRENETschen Formel  $\mathbf{t}'(s) = k(s) \mathbf{n}(s)$  folgt

$$0 = \frac{d}{ds} (\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_E) = (\mathbf{t}'(s), \mathbf{n}_E) = k(s) (\mathbf{n}(s), \mathbf{n}_E)$$

und damit  $(\mathbf{n}(s), \mathbf{n}_E) = 0$  im Falle  $k(s) \neq 0$ . Unter Einbeziehung der zweiten FRENETschen Formel  $\mathbf{n}'(s) = -k(s) \mathbf{t}(s) + w(s) \mathbf{b}(s)$  folgt nach nochmaliger Ableitung des rechts stehenden Ausdrucks

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} [k(s) (\mathbf{n}(s), \mathbf{n}_E)] \\ &= k'(s) (\mathbf{n}(s), \mathbf{n}_E) + k(s) (\mathbf{n}'(s), \mathbf{n}_E) \\ &= k(s) (\mathbf{n}'(s), \mathbf{n}_E) \\ &= k(s) [-k(s) (\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_E) + w(s) (\mathbf{b}(s), \mathbf{n}_E)] \\ &= k(s) [-k(s) d + w(s) (\mathbf{b}(s), \mathbf{n}_E)] \end{aligned}$$

und daraus  $k(s)d = w(s)(\mathbf{b}(s), \mathbf{n}_E)$ . Schließlich erhält man mit der dritten FRENETSchen Formel  $\mathbf{b}'(s) = -w(s)\mathbf{n}(s)$ :

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{b}(s), \mathbf{n}_E) = (\mathbf{b}'(s), \mathbf{n}_E) = -w(s)(\mathbf{n}(s), \mathbf{n}_E) = 0$$

und folglich  $(\mathbf{b}(s), \mathbf{n}_E) = b = \text{const.}$  (im Falle  $w(s) \neq 0$ ). Damit ist

$$k(s)d = w(s)b \quad \text{oder} \quad w(s) = \frac{d}{b}k(s) = ck(s).$$

b) Es gelte  $w(s) = ck(s)$ . Zu zeigen ist, dass ein konstanter Vektor  $\mathbf{n}_E$  mit  $\|\mathbf{n}_E\| = 1$  und  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_E) = \text{const.}$  existiert.

Es gibt zunächst stets einen Winkel  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ) mit  $c = \cot(\alpha)$ . Mit diesem  $\alpha$  setzt man  $\mathbf{n}_E$  als Vektor aus der rektifizierenden Ebene gemäß

$$\mathbf{n}_E = \cos(\alpha)\mathbf{t}(s) + \sin(\alpha)\mathbf{b}(s)$$

an. Für  $\mathbf{n}_E$  gilt dann

$$(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_E) = \cos(\alpha) = \text{const.} \quad \text{und} \quad \|\mathbf{n}_E\| = 1.$$

Es bleibt deshalb zu zeigen, dass  $\mathbf{n}_E$  unabhängig von  $s$ , d.h.  $\frac{d\mathbf{n}_E}{ds} = \mathbf{0}$  ist. Mit den FRENETSchen Formeln  $\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$ ,  $\mathbf{b}'(s) = -w(s)\mathbf{n}(s)$  und  $w(s) = ck(s) = \cot(\alpha)k(s)$  erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}_E}{ds} &= \cos(\alpha)\mathbf{t}'(s) + \sin(\alpha)\mathbf{b}'(s) \\ &= (\cos(\alpha)k(s) - \sin(\alpha)w(s))\mathbf{n}(s) \\ &= \left( \cos(\alpha) - \sin(\alpha)\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right) k(s)\mathbf{n}(s) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

## A.2. Lösungen zu den Aufgaben aus 4.13

1. Ist  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T = \overrightarrow{OP_s} \neq \pm\mathbf{e}_3$  ein beliebiger Punkt auf  $S^2$ , so kann die Gerade  $\mathbf{y}^\pm(t)$ , die durch  $\mathbf{X}$  und  $\pm\mathbf{e}_3$  verläuft, wie folgt beschrieben werden:

$$\mathbf{y}^\pm(t) = \begin{pmatrix} y_1^\pm(t) \\ y_2^\pm(t) \\ y_3^\pm(t) \end{pmatrix} = \mathbf{X} + t(\mathbf{X} \mp \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} (1+t)X_1 \\ (1+t)X_2 \\ (1+t)X_3 \mp t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Koordinate  $y_3^\pm(t)$  verschwindet mit  $t = \frac{-X_3}{X_3 \mp 1}$ . Folglich ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der  $X_1X_2$ -Ebene:

$$\overrightarrow{OP_E} = \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 \mp X_3} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich die Abbildungen

$$\pi_{\pm} : S_{\pm}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{gemäß } \mathbf{X} \in S_{\pm}^2 \rightarrow \pi_{\pm}(\mathbf{X}) = \mathbf{u} = \frac{1}{1 \mp X_3} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Die inverse Abbildung dazu entsteht auf folgendem Wege. Zunächst ist

$$(u^1)^2 (1 \mp X_3)^2 = X_1^2 \quad \text{und} \quad (u^2)^2 (1 \mp X_3)^2 = X_2^2.$$

Nach Addition beider Ausdrücke sowie unter Berücksichtigung von  $\|\mathbf{u}\|^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2$  und  $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$  ergibt sich

$$\|\mathbf{u}\|^2 (1 \mp 2X_3 + X_3^2) = X_1^2 + X_2^2 = 1 - X_3^2.$$

Es entsteht die in  $X_3$  quadratische Gleichung

$$X_3^2 \mp 2 \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2 + 1} X_3 + \frac{\|\mathbf{u}\|^2 - 1}{\|\mathbf{u}\|^2 + 1} = 0$$

mit der (für alles Weitere nur interessanten) Lösung

$$X_3 = \pm \frac{\|\mathbf{u}\|^2 - 1}{\|\mathbf{u}\|^2 + 1}.$$

Damit ist weiter

$$X_i = u^i (1 \mp X_3) = \frac{2u^i}{1 + \|\mathbf{u}\|^2} \quad i = 1, 2$$

und es ergeben sich die Parametrisierungen der Teilflächen  $S_{\pm}^2$ :

$$\mathbf{X}^{\pm} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_{\pm}^2 \quad \text{gemäß } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{X}^{\pm}(\mathbf{u}) = \frac{1}{1 + \|\mathbf{u}\|^2} \begin{pmatrix} 2u^1 \\ 2u^2 \\ \pm (\|\mathbf{u}\|^2 - 1) \end{pmatrix} \in S_{\pm}^2.$$

Die Tangentenbasisvektoren

$$\mathbf{X}_{,1}^{\pm} = A \begin{pmatrix} 1 - (u^1)^2 + (u^2)^2 \\ -2u^1 u^2 \\ \pm 2u^1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_{,2}^{\pm} = A \begin{pmatrix} -2u^1 u^2 \\ 1 + (u^1)^2 - (u^2)^2 \\ \pm 2u^2 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{2}{(\|\mathbf{u}\|^2 + 1)^2}$$

sind zueinander orthogonal, womit die Regularität der Parametrisierungen gesichert ist. Für die erste metrische Fundamentalgröße ergibt sich

$$\mathbf{G}_{\mathbf{X}} = 2A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Mit den Tangentenbasisvektoren

$$\mathbf{X}_{,1} = \begin{pmatrix} 1 - (u^1)^2 + (u^2)^2 \\ 2u^1u^2 \\ 2u^1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{X}_{,2} = \begin{pmatrix} 2u^1u^2 \\ 1 - (u^2)^2 + (u^1)^2 \\ -2u^2 \end{pmatrix}$$

erhält man die erste metrische Fundamentalgröße

$$\mathbf{G}_{\mathbf{X}} = (1 + \|\mathbf{u}\|^2)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \|\mathbf{u}\|^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2$$

und das Einheitsnormalenfeld

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{X}_{,1} \times \mathbf{X}_{,2}}{\|\mathbf{X}_{,1} \times \mathbf{X}_{,2}\|} = \frac{1}{1 + \|\mathbf{u}\|^2} \begin{pmatrix} -2u^1 \\ 2u^2 \\ 1 - \|\mathbf{u}\|^2 \end{pmatrix}.$$

Die Ableitungen der Tangentenbasisvektoren

$$\mathbf{X}_{,11} = \begin{pmatrix} -2u^1 \\ 2u^2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_{,22} = \begin{pmatrix} 2u^1 \\ -2u^2 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_{,12} = \begin{pmatrix} 2u^2 \\ 2u^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefern mit  $L_{ij} = (\mathbf{X}_{,ij}, \mathbf{N})$  und  $L_{12} = L_{21}$  die zweite metrische Fundamentalgröße

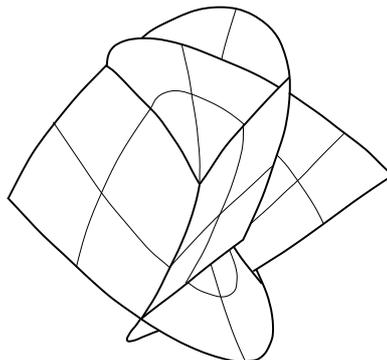
$$\mathbf{L}_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für die GAUßsche Krümmung:

$$K(u) = \frac{\det(\mathbf{L}_{\mathbf{X}})}{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})} = \frac{-4}{(1 + \|\mathbf{u}\|^2)^2} < 0.$$

Die ENNEPER-Fläche ist folglich in jedem Flächenpunkt hyperbolisch.

Mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = -\lambda_2$  der Matrix  $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{X}} = (1 + \|\mathbf{u}\|^2)^{-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  ist die mittlere Krümmung  $H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$  und folglich die ENNEPER-Fläche eine Minimalfläche.



3. Analog zur Herleitung der FRENETschen Formeln im Abschnitt 3.4 werden die Ableitungen  $\mathbf{t}'(s)$ ,  $\mathbf{N}'(s)$ ,  $\mathbf{P}'(s)$  als Linearkombinationen von  $\mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{N}(s) \equiv \mathbf{N}(\mathbf{u}(s))$  und  $\mathbf{P}(s)$  angesetzt. Dies führt zu folgender Matrixdarstellung:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{P}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{t}', \mathbf{t}) & (\mathbf{t}', \mathbf{N}) & (\mathbf{t}', \mathbf{P}) \\ (\mathbf{N}', \mathbf{t}) & (\mathbf{N}', \mathbf{N}) & (\mathbf{N}', \mathbf{P}) \\ (\mathbf{P}', \mathbf{t}) & (\mathbf{P}', \mathbf{N}) & (\mathbf{P}', \mathbf{P}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{P}(s) \end{pmatrix}.$$

Für die Koeffizienten der Übertragungsmatrix gilt:

a) Wegen  $(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = (\mathbf{N}, \mathbf{N}) = (\mathbf{P}, \mathbf{P}) = 1$  ist  $(\mathbf{t}', \mathbf{t}) = (\mathbf{N}', \mathbf{N}) = (\mathbf{P}', \mathbf{P}) = 0$ .

b) Aus  $(\mathbf{t}, \mathbf{N}) = (\mathbf{t}, \mathbf{P}) = (\mathbf{N}, \mathbf{P}) = 0$  folgt

$$(\mathbf{t}', \mathbf{N}) = -(\mathbf{N}', \mathbf{t}); \quad (\mathbf{t}', \mathbf{P}) = -(\mathbf{P}', \mathbf{t}); \quad (\mathbf{N}', \mathbf{P}) = -(\mathbf{P}', \mathbf{N}).$$

c) Mit Formel (4.21) ist:

$$(\mathbf{t}', \mathbf{N}) = (\mathbf{x}'', \mathbf{N}) = k_n;$$

$$(\mathbf{t}', \mathbf{P}) = (\mathbf{x}'', \mathbf{N} \times \mathbf{t}) = k_g$$

$$(\mathbf{N}', \mathbf{P}) = (\mathbf{N}', \mathbf{N} \times \mathbf{t}) = [\mathbf{N}', \mathbf{N}, \mathbf{t}] \equiv w_g.$$

Die Größe  $w_g$  kann als geodätische Windung (oder Torsion) bezeichnet werden. Zusammengefasst erhält man:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{P}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_n & k_g \\ -k_n & 0 & w_g \\ -k_g & -w_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{P}(s) \end{pmatrix}.$$

4. a) Mit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, g(u^1, u^2))^T$  entsteht die erste metrische Fundamentalgröße (siehe Beispiele 4.2 und 4.8):

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \quad \text{mit } K = EG - F^2,$$

wobei

$$E = 1 + g_{,1}^2 \quad \text{und} \quad E_{,1} = 2g_{,1}g_{,11} \quad ; \quad E_{,2} = 2g_{,1}g_{,12}$$

$$G = 1 + g_{,2}^2 \quad \text{und} \quad G_{,1} = 2g_{,2}g_{,21} \quad ; \quad G_{,2} = 2g_{,2}g_{,22}$$

$$F = g_{,1}g_{,2} \quad \text{und} \quad F_{,1} = g_{,11}g_{,2} + g_{,1}g_{,21} \quad ; \quad F_{,2} = g_{,12}g_{,2} + g_{,1}g_{,22}.$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie  $\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$  ( $i, j, l = 1, 2$ ) ergeben sich 6 CHRISTOFFEL-Symbole. Mit Formel (4.31) ist

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2K} (GE_{,1} - 2FF_{,1} + FE_{,2})$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2K} (GE_{,2} - FG_{,1})$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2K} (2GF_{,2} - GG_{,1} - FG_{,2})$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2K} (2EF_{,1} - EE_{,2} - FE_{,1})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2K} (EG_{,1} - FE_{,2})$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2K} (EG_{,2} - 2FF_{,2} + FG_{,1}).$$

b) Mit den Ableitungen der Metrikoeffizienten aus (4.47) ergeben sich aus Formel (4.31) die CHRISTOFFEL-Symbole

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}G^{11}G_{11,1} = \frac{\dot{r}\ddot{r} + \dot{h}\ddot{h}}{\dot{r}^2 + \dot{h}^2} & \Gamma_{11}^2 &= 0 \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}G^{22}G_{22,1} = \frac{\dot{r}}{r} & \Gamma_{12}^1 &= 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2}G^{11}G_{22,1} = \frac{-r\dot{r}}{\dot{r}^2 + \dot{h}^2} & \Gamma_{22}^2 &= 0.\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

5. Aus Formel (4.43) für die geodätische Krümmung einer Flächenkurve folgt für die Kurvenschar

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{c_1}(u^1) &= \mathbf{X}(u^1, c_1) \quad \text{mit } \dot{u}^1 = 1, \dot{u}^2 = 0 : \\ k_{g_1} &= \frac{\sqrt{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})}}{(G_{11})^{3/2}}\Gamma_{11}^2\end{aligned}$$

und analog für die Kurvenschar

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{c_2}(u^2) &= \mathbf{X}(c_2, u^2) \quad \text{mit } \dot{u}^1 = 0, \dot{u}^2 = 1 : \\ k_{g_2} &= -\frac{\sqrt{\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}})}}{(G_{22})^{3/2}}\Gamma_{22}^1.\end{aligned}$$

Im Fall einer GAUßschen Parametrisierung ist  $G_{12} = G_{21} = 0$  und damit  $\det(\mathbf{G}_{\mathbf{X}}) = G_{11}G_{22}$ . Für die CHRISTOFFEL-Symbole folgt mit  $G^{ii} = (G_{ii})^{-1}$  und  $G^{12} = G^{21} = 0$  aus (4.31):

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}G^{22}G_{11,2} = -\frac{G_{11,2}}{2G_{22}}; \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}G^{11}G_{22,1} = -\frac{G_{22,1}}{2G_{11}}.$$

Daraus ergeben sich die geodätischen Krümmungen

$$\begin{aligned}k_{g_1} &= -\frac{\sqrt{G_{11}G_{22}}}{\sqrt{G_{11}G_{11}}}\frac{G_{11,2}}{2G_{22}} = -\frac{G_{11,2}}{2G_{11}\sqrt{G_{22}}} \\ k_{g_2} &= \frac{\sqrt{G_{11}G_{22}}}{\sqrt{G_{22}G_{22}}}\frac{G_{22,1}}{2G_{11}} = \frac{G_{22,1}}{2G_{22}\sqrt{G_{11}}}.\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

6.  $\mathbf{x}_1(t)$  und  $\mathbf{x}_2(t)$  sind Teilkurven von Großkreisen auf  $S^2$  und damit Geodäten.  $\mathbf{x}_3(t)$  ist jedoch ein Breitenkreis mit der geodätischen Krümmung (siehe dazu Beispiel 4.19)  $k_{g_3} = -\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ . Demzufolge ist  $\triangle_{ABC}$  kein geodätisches Dreieck.

a) Schnittpunkt  $A$  von  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_3$ :

$$\mathbf{x}_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{x}_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$$

Schnittpunkt  $B$  von  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$ :

$$\mathbf{x}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{x}_2(0) = (1, 0, 0)^T$$

Schnittpunkt  $C$  von  $\mathbf{x}_2$  und  $\mathbf{x}_3$ :

$$\mathbf{x}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{x}_3(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T$$

b) Mit den normierten Tangentenvektoren

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ -\sin(t) \end{pmatrix}; \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \end{pmatrix}; \quad \dot{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man für die Außenwinkel an den Schnittpunkten:

$$\alpha = \arccos\left(\left(\dot{\mathbf{x}}_3\left(\frac{\pi}{2}\right), \dot{\mathbf{x}}_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \arccos(0) = \frac{1}{2}\pi$$

$$\beta = \arccos\left(\left(\dot{\mathbf{x}}_1\left(\frac{\pi}{2}\right), \dot{\mathbf{x}}_2(0)\right)\right) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

$$\gamma = \arccos\left(\left(\dot{\mathbf{x}}_2\left(\frac{\pi}{2}\right), \dot{\mathbf{x}}_3(0)\right)\right) = \arccos(-1) = \pi.$$

c) Das Integral über die geodätische Krümmung  $k_{g3}$  längs  $\mathbf{x}_3(t)$  im Parameterintervall  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  ist

$$\int_0^{\pi/2} k_{g3} ds = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} dt = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Mit diesem Ergebnis und der GAUßschen Krümmung  $K = 1$  in allen Punkten von  $S^2$  folgt aus der Integralformel von GAUß und BONNET für den Inhalt von  $\triangle_{ABC}$ :

$$\begin{aligned} |\triangle_{ABC}| &= \int_{\triangle_{ABC}} dF = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma) - \int_{\partial(\triangle_{ABC})} k_g ds \\ &= 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + \pi\right) - \int_0^{\pi/2} k_{g3} ds \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\pi. \end{aligned}$$

7. Aus dem Theorema egregium folgt:  $K = \frac{R_{1221}}{\det(\mathbf{G}_\mathbf{x})}$ . Mit  $\mathbf{G}_\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G_{22} \end{pmatrix}$  ist  $\det(\mathbf{G}_\mathbf{x}) = G_{22}$  und

$$R_{1221} = -R_{2121} = -R_{121}^s G_{s2} = -R_{121}^2 G_{22}.$$

Damit ergibt sich nach (4.38):

$$K = -R_{121}^2 = -\Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{11,2}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2.$$

Aus der allgemeinen Formel für die CHRISTOFFEL-Symbole (4.31) folgt

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}G^{11} (G_{11,1} + G_{11,1} - G_{11,1}) = 0 \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}G^{11} (G_{11,2} + G_{21,1} - G_{12,1}) = 0 \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}G^{11} (G_{12,2} + G_{21,1} - G_{22,1}) = -\frac{G_{22,1}}{2} \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}G^{22} (G_{21,1} + G_{12,1} - G_{11,2}) = 0 \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}G^{22} (G_{21,2} + G_{22,1} - G_{12,2}) = \frac{G_{22,1}}{2G_{22}} \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}G^{22} (G_{22,2} + G_{22,2} - G_{22,2}) = \frac{G_{22,2}}{2G_{22}}
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{G_{22,1}}{2G_{22}} \right) - \left( \frac{G_{22,1}}{2G_{22}} \right)^2 \\
&= \frac{-1}{2G_{22}^2} (G_{22,11}G_{22} - (G_{22,1})^2) - \frac{(G_{22,1})^2}{4G_{22}^2} \\
&= \frac{1}{4G_{22}^2} ((G_{22,1})^2 - 2G_{22,11}G_{22}) \\
&= \frac{1}{2G_{22}} \left( \frac{1}{2G_{22}} \left( \frac{\partial G_{22}}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial^2 G_{22}}{\partial r^2} \right).
\end{aligned}$$

8. Die Matrix  $\mathbf{B}_k$  wird in Blockmatrizen aufgeteilt:

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} \Gamma_{1k}^1 & \Gamma_{1k}^2 & L_{1k} \\ \Gamma_{2k}^1 & \Gamma_{2k}^2 & L_{2k} \\ -L_k^1 & -L_k^2 & 0 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{\Gamma}_k & \mathbf{L}_k \\ \hline -(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_k)^T & 0 \end{array} \right).$$

Damit nimmt die Integrabilitätsbedingung (4.34) folgende Form an:

$$\begin{aligned}
&\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{\Gamma}_{k,l} + \mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l - \mathbf{L}_k(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_l)^T & \mathbf{L}_{k,l} + \mathbf{\Gamma}_k\mathbf{L}_l \\ \hline -(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_k)_{,l}^T - (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_k)^T\mathbf{\Gamma}_l & -(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_k)^T\mathbf{L}_l \end{array} \right) \\
&= \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{\Gamma}_{l,k} + \mathbf{\Gamma}_l\mathbf{\Gamma}_k - \mathbf{L}_l(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_k)^T & \mathbf{L}_{l,k} + \mathbf{\Gamma}_l\mathbf{L}_k \\ \hline -(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_l)_{,k}^T - (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_l)^T\mathbf{\Gamma}_k & -(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_l)^T\mathbf{L}_k \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Blöcke beider Matrizen werden gleichgesetzt. Aus

$$\mathbf{\Gamma}_{k,l} + \mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l - \mathbf{L}_k(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_l)^T = \mathbf{\Gamma}_{l,k} + \mathbf{\Gamma}_l\mathbf{\Gamma}_k - \mathbf{L}_l(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_k)^T$$

folgen in Koeffizientenschreibweise die Gleichungen von GAUß (4.36):

$$\Gamma_{jk,l}^m + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{sl}^m - L_{jk}L_{ls}G^{sm} = \Gamma_{jl,k}^m + \Gamma_{jl}^s \Gamma_{sk}^m - L_{jl}L_{ks}G^{sm} \quad j, k, l, m = 1, 2.$$

Aus  $\mathbf{L}_{k,l} + \mathbf{\Gamma}_k\mathbf{L}_l = \mathbf{L}_{l,k} + \mathbf{\Gamma}_l\mathbf{L}_k$  folgt

$$L_{ik,l} + \Gamma_{ik}^s L_{sl} = L_{il,k} + \Gamma_{il}^s L_{sk} \quad i, k, l = 1, 2$$

und damit die Gleichungen von CODAZZI-MAINARDI (4.37).

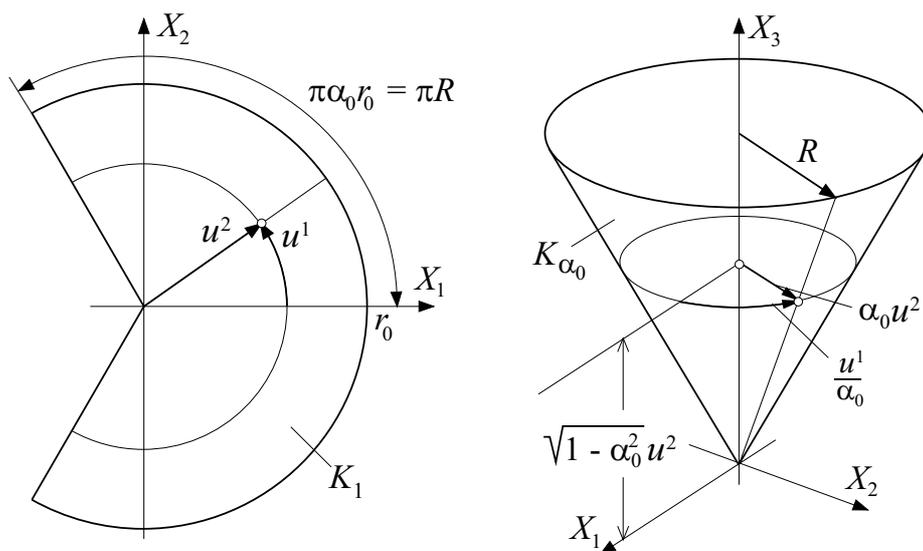
Aus  $-(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_k)^T - (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_k)^T \Gamma_l = -(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_l)^T - (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_l)^T \Gamma_k$  erhält man nochmals die Gleichungen von CODAZZI-MAINARDI. Schließlich ist die letzte Gleichung  $(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_k)^T \mathbf{L}_l = (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}_l)^T \mathbf{L}_k$  auf Grund der Symmetrie von  $\mathbf{G}^{-1}$  stets erfüllt.

Die Integrabilitätsbedingungen (4.34) sind folglich genau dann erfüllt, wenn dies für die Gleichungen von GAUß und CODAZZI-MAINARDI gilt.

9. Mit der Vektorfunktion

$$\mathbf{X}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} X_1(\mathbf{u}) \\ X_2(\mathbf{u}) \\ X_3(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 u^2 \cos(u^1/\alpha_0) \\ \alpha_0 u^2 \sin(u^1/\alpha_0) \\ \sqrt{1 - \alpha_0^2 u^2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -\pi\alpha_0 < u^1 < \pi\alpha_0 \\ 0 < u^2 < R/\alpha_0 \end{array}$$

und dem Zusammenhang  $b = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1 - \alpha_0^2}}$  überprüft man durch Substitution von  $X_i(\mathbf{u})$  in  $X_1^2 + X_2^2 = b^2 X_3^2$  und  $0 < X_1^2 + X_2^2 < R^2$ , dass  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  eine reguläre Parametrisierung des Kegelmantels ist.



Die von  $\lambda$  mit  $\alpha_0 \leq \lambda \leq 1$  stetig abhängige Familie von Vektorfunktionen

$$\mathbf{X}_\lambda(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \lambda u^2 \cos(u^1/\lambda) \\ \lambda u^2 \sin(u^1/\lambda) \\ \sqrt{1 - \lambda^2 u^2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -\pi\alpha_0 < u^1 < \pi\alpha_0 \\ 0 < u^2 < R/\alpha_0 \end{array}$$

liefert die angestrebte Abwicklungsfunktion. Mit  $\lambda = \alpha_0$  erhält man die Parametrisierung des Kegelmantels  $K_{\alpha_0}$  und mit  $\lambda = 1$  ist

$$\mathbf{X}_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u^2 \cos(u^1) \\ u^2 \sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -\pi\alpha_0 < u^1 < \pi\alpha_0 \\ 0 < u^2 < R/\alpha_0 \end{array}$$

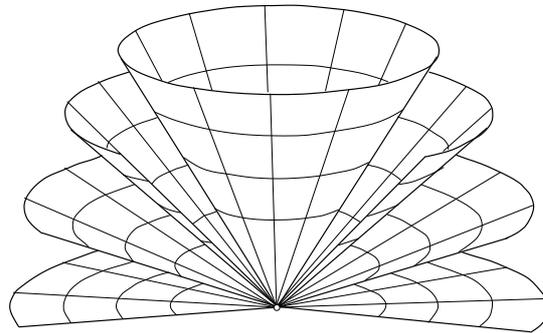
eine Parametrisierung des ebenen Kreissektors  $K_1$  (siehe Abb. A6). Über die Tangentebasisvektoren

$$\mathbf{T}_{\lambda,1} = \mathbf{X}_{\lambda,1} = \begin{pmatrix} -u^2 \sin(u^1/\lambda) \\ u^2 \cos(u^1/\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_{\lambda,2} = \mathbf{X}_{\lambda,2} = \begin{pmatrix} \lambda \cos(u^1/\lambda) \\ \lambda \sin(u^1/\lambda) \\ \sqrt{1-\lambda^2} \end{pmatrix}$$

entstehen die von  $\lambda$  unabhängigen Fundamentalgrößen

$$\mathbf{G}_\lambda(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (u^2)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Abwickelbarkeit der Kegelmantelfläche auf die Ebene gezeigt.



10. Nach dem Hauptsatz der Flächentheorie (Abschnitt 4.7) muss zunächst  $\mathbf{G}$  positiv definit sein, d.h.  $A > 0$  und  $\det(\mathbf{G}) = AB - C^2 > 0$ . Weiterhin müssen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{L}$  die Integrabilitätsbedingungen (4.36) und (4.37) erfüllen. Die aus den konstanten Koeffizienten von  $\mathbf{G}$  nach (4.31) gebildeten CHRISTOFFEL-Symbole verschwinden, so dass die Gleichungen (4.36) die Form

$$(L_{jk}L_{ls} - L_{jl}L_{ks})G^{sm} = 0 \quad j, k, l, m = 1, 2$$

annehmen. Drückt man diese Bedingungen mit den Konstanten von  $\mathbf{L}$  aus, so ergibt sich als einzige Forderung

$$RS - T^2 = \det(\mathbf{L}) = 0.$$

Mit der Konstanz von  $\mathbf{L}$  und mit  $\Gamma_{ij}^s = 0$  verschwindet außerdem die linke Seite von (4.37).  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{L}$  sind also metrische Fundamentalformen einer Parametrisierung eines Flächenstückes, wenn

$$A > 0, \quad AB - C^2 > 0 \quad \text{und} \quad RS = T^2. \quad (\text{A.4})$$

Wegen  $\det(\mathbf{L}) = 0$  verschwindet die GAUßsche Krümmung  $K$  dieses Flächenstückes. Flächenstücke, die in einer Parametrisierung konstante erste und zweite Fundamentalgrößen aufweisen, gehören damit zur Menge der Flächen mit verschwindender GAUßscher Krümmung, d.h. besitzen nur parabolische Flächenpunkte oder Flachpunkte.

Die Matrizen

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = \mathbf{0} \quad \begin{array}{l} \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \\ \text{linear unabhängig} \end{array}$$

erfüllen (A.4) und definieren eine Ebene mit den Richtungsvektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ . Wählt man

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (R > 0),$$

so liegen die Fundamentalgrößen eines Flächenstückes auf der Mantelfläche eines Kreiszylinders mit dem Radius  $R$  vor.

11. Mit dem begleitenden Dreibein

$$\mathbf{X}_{,1} = \begin{pmatrix} -u^2 \sin(u^1) \\ u^2 \cos(u^1) \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{,2} = \begin{pmatrix} \cos(u^1) \\ \sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\beta \sin(u^1) \\ \beta \cos(u^1) \\ -u^2 \end{pmatrix}$$

ergeben sich die Fundamentalgrößen

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} (u^2)^2 + \beta^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und weiter

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L} = \frac{\beta}{(u^2)^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (u^2)^2 + \beta^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen  $H = \frac{1}{2} \operatorname{spur}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}) = 0$  ist nach Definition 4.15 die Wendelfläche eine Minimalfläche.

Zu einem kürzeren Beweis kommt man wie folgt: Nach Beispiel 4.25 ist das Katenoid eine Minimalfläche und im Beispiel 4.28 wurde die Abwickelbarkeit eines Katenoids auf die Wendelfläche gezeigt. Beide Flächen sind folglich zueinander isometrisch und besitzen damit die gleiche innere Geometrie. Insbesondere verschwindet für beide Flächen die mittlere Krümmung  $H$ , woraus unmittelbar die Minimaleigenschaft der Wendelfläche folgt.

12. Mit der Standardparametrisierung

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} R \sin(u^1) \\ R \cos(u^1) \\ u^2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 0 \leq u^1 \leq 2\pi \\ u^2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

einer Kreiszylindermantelfläche  $\mathfrak{M}$  vom Radius  $R$  ist eine geschlossene Kurve  $\mathbf{c}$ , die jede Meridianlinie  $\mathbf{X}(c, u^2)$  ( $0 \leq c < 2\pi$ ) genau einmal schneidet, durch

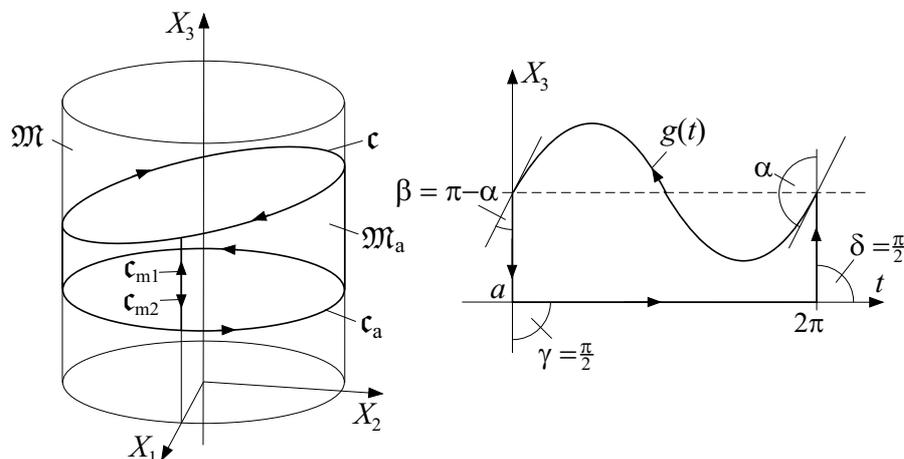
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} R \sin(t) \\ R \cos(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

darstellbar, wobei  $g$  eine zweimal stetig differenzierbare  $2\pi$ -periodische Funktion ist ( $g(t) = g(t + 2\pi)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ ).

Es sei  $a < \min_{0 \leq t < 2\pi} g(t)$  eine Konstante und  $\mathfrak{M}_a$  das Flächenstück auf  $\mathfrak{M}$ , welches

durch  $\mathbf{c}$  und den Breitenkreis  $\mathbf{c}_a$  mit der Parametrisierung  $\mathbf{X}(u^1, a)$  berandet wird (siehe Abb. A8):

$$\mathfrak{M}_a = \{ \mathbf{X} \in \mathfrak{M} \mid \mathbf{X}(t, a) \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}(t, g(t)); \quad 0 \leq t \leq 2\pi \}.$$



$\mathfrak{M}_a$  wird längs des Meridians  $\mathbf{X}(0, u^2)$  aufgeschnitten und die beiden Schnittufer mit  $\mathbf{c}_{m1}$  und  $\mathbf{c}_{m2}$  ( $\mathbf{c}_{m2} = -\mathbf{c}_{m1}$ ) bezeichnet. Nach der Integralformel von GAUß und BONNET gilt für das Flächenstück  $\mathfrak{M}_a$ :

$$\iint_{\mathfrak{M}_a} K dF + \int_{\partial\mathfrak{M}_a} k_g(s) ds + \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi. \quad (\text{A.5})$$

Für die Größen in dieser Formel gilt folgendes;

a) Die GAUßsche Krümmung verschwindet auf einer Zylinderfläche, demzufolge ist

$$\iint_{\mathfrak{M}_a} K dF = 0.$$

b) Die Kurven  $\mathbf{c}_a$ ,  $\mathbf{c}_{m1}$  und  $\mathbf{c}_{m2}$  der Randkurve  $\partial\mathfrak{M}_a = \mathbf{c} \cup \mathbf{c}_a \cup \mathbf{c}_{m1} \cup \mathbf{c}_{m2}$  sind Geodäten (mit der geodätischen Krümmung  $k_g = 0$ ), so dass

$$\int_{\partial\mathfrak{M}_a} k_g(s) ds = \int_{\mathbf{c}} k_g(s) ds.$$

c) Wegen der  $2\pi$ -Periodizität der Funktion  $g(t)$  gilt für die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ :  $\alpha + \beta = \pi$ . Zusammen mit  $\gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$  (siehe Abb. A8) ist damit  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ . Werden diese Schlußfolgerungen in (A.5) berücksichtigt, so ergibt sich für die geodätische Gesamtkrümmung von  $\mathbf{c}$ :

$$\int_{\mathbf{c}} k_g(s) ds = 0.$$

# Literaturverzeichnis

- [Bett] **Betten, J.:** Tensorrechnung für Ingenieure, B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft Stuttgart 1987
- [Gray] **Gray, A.:** Differentialgeometrie, Spektrum Akad. Verl. 1994
- [dCar] **do Carmo, M. P.:** Differentialgeometrie von Kurven und Flächen; Vieweg-Verlag, 1992
- [Jost] **Jost, J.:** Differentialgeometrie und Minimalflächen; Springer-Verlag Berlin, 1994
- [Klot] **Klotzek, B.:** Einführung in die Differentialgeometrie I und II; Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1981 u. 1983
- [Kühn] **Kühnel, W.:** Differentialgeometrie, Vieweg-Verlag, 2003, 2. Auflage
- [MeVa] **Meyberg, K.; Vachnauer, P.:** Höhere Mathematik Bd. 1 und 2; Springer Verlag Berlin 1995
- [RKP] **Reckziegel, H.; Kriener, M.; Pawel, K.:** Elementare Differentialgeometrie mit Maple; Vieweg-Verlag, 1998
- [Stru] **Strubecker, K.:** Differentialgeometrie I - III; Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 1969
- [Wüns] **Wünsch, V.:** Differentialgeometrie - Kurven und Flächen; B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft Stuttgart Leipzig 1997



# Stichwortverzeichnis

- Abbildung, 20
  - affine, 24
  - bijektiv, 21
  - bilinear, 10
  - eindeutig, 20
  - injektiv, 21
  - inverse, 21
  - isometrisch, 125
  - orthogonal, 24
  - positiv definit, 10
  - stetig, 20
  - surjektiv, 21
  - vektorwertig, 22
- Ableitungsgleichung
  - nach GAUß, 96
  - nach WEINGARTEN, 85
- Ableitungsgleichungen, 39, 96
- Archimedische Spirale, 64
- Außenwinkel, 130
  
- Böschungslinie, 65
- Basis, 8
  - der Standard-Topologie, 18
  - kanonische, 9
  - reziproke, 16
  - Standard-, 9
- begleitendes Dreibein, 34, 76
- Binormalenvektor, 34
- Bogenelement, 31
- Bogenlängenparameter, 32
  
- CHRISTOFFEL-Symbole, 97
  
- Diffeomorphismus, 23
- Drehfläche, 113
  - Breitenkreis, 113
  - Meridian, 113
  
- Ebene, 15, 70
  - rektifizierende, 35
- Einheitsnormalenfeld, 75
- Einheitssphäre, 71
  - Breitenkreis, 107
  - Großkreis, 107
- einschaliges Hyperboloid, 119
- Ellipse, 29
- ENNEPER-Fläche, 137
- EUKLIDische Bewegung, 24, 45, 51, 72
- EUKLIDischer Raum, 11
- EULER-Charakteristik, 133, 134
- Evolute, 53
- Evolvente, 55
- Exponentialabbildung, 109
  
- Fläche
  - abwickelbar, 126
  - Ecken der, 133
  - Flachpunkt, 90
  - Kanten der, 133
  - mit stückweise glattem Rand, 130
  - Nabelpunkt, 90
  - orientierbar, 75
  - Spur der, 68
- Flächenelement, 82
- Flächenkurve, 80
- Flächenpunkt
  - elliptisch, 93
  - hyperbolisch, 94
  - parabolisch, 94
- Flächenstück
  - isometrisch, 125
  - regulär parametrisierbar, 68
  - reguläres, 69
- Flachpunkt, 94
- FRENET-Kurve, 35

- FRENETSche Formeln, 39  
 Fundamentalform  
   erste metrische, 80  
   zweite metrische, 84  
 Fundamentalgröße  
   erste metrische, 80  
   zweite metrische, 84  
 Funktion, 20  
   inverse, 21  
   skalar, 22  
 Funktional, 22  
   lineares, 22  
  
 GAUß-Abbildung, 76  
 Gebiet, 20  
 Geodäte, 104, 105  
 Geodätengleichung, 106  
   Anfangswertproblem, 108  
   Randwertproblem, 108  
 geodätische Polarkoordinaten, 109  
 geodätisches Dreieck, 131  
 geodätisches  $n$ -Eck, 131  
 Gerade, 14  
 Gesamtkrümmung, 131, 136  
 Gleichung  
   von CODAZZI-MAINARDI, 99  
   von GAUß, 99  
 Gradient, 22  
 Gradkurve, 119  
 GRASSMANN-Identität, 13  
 Grenzwert, 20  
  
 Hauptkrümmungen, 89  
 Hauptkrümmungsrichtungen, 89  
 Hauptnormalenvektor, 34  
 Hauptsatz  
   der Flächentheorie, 101  
   der Kurventheorie, 43  
 Homöomorphismus, 23  
  
 Immersion, 23  
 innere Geometrie, 100  
 inneres Produkt, 10  
 innergeometrische Größe, 100, 104  
 Integrabilitätsbedingungen, 98  
 Integralformel von GAUß-BONNET, 131  
 Isomorphismus, 24  
  
 JACOBI-Identität, 13  
 JACOBI-Matrix, 22, 71  
  
 Katenoid, 124  
 Klothoide, 52  
 Koordinatenlinien, 74  
 Krümmung, 86  
   der Kurve, 35  
   GAUßsche, 92  
   geodätische, 87  
   mittlere, 92  
   orientierte, 46  
 Krümmungskreis, 88  
 Krümmungsradius, 35  
 Kurve, 25  
   ebene, 40, 45  
   einfach geschlossen, 58  
   einfach periodisch, 58  
   geschlossen, 25, 58  
   Länge der, 31  
   offen, 25  
   orientierte, 27  
   periodisch, 25, 58  
   regulär parametrisiert, 25, 26  
   reguläre, 26  
   rektifizierbare, 31  
   Spur der, 26  
 Kurvenverlauf  
   konkaver, 47  
   konvexer, 47  
  
 LAGRANGE-Identität, 13  
 Linkssystem, 12  
 Logarithmische Spirale, 64  
  
 Möbius-Band, 79, 119  
 Menge  
   abgeschlossen, 19  
   abgeschlossene Hülle einer, 19  
   beschränkt, 20  
   Inneres der, 19  
   kompakt, 20  
   offen, 19  
   Rand einer, 20  
   zusammenhängend, 20  
 Meridianlinie, 107  
 Metrik, 9

- Metrikoeffizienten, 80, 97
- Minimalfläche, 120, 123
- NEILsche Parabel, 55, 144
- Norm, 10
- Normalebene, 35
- Normalenvektor, 15
- Normalkrümmung, 87
- offene Kugel, 18
- Orientierung, 11, 27, 77
  - positiv orientiert, 11
- Ortsvektor, 9
- Parametertransformation
  - orientierungserhaltende, 27
  - orientierungsumkehrend, 27
  - verträglich, 26
- Parametrisierung
  - GAUßsche, 73
  - nach der Bogenlänge, 32
  - natürliche, 32
  - verträgliche, 69
- Periode, 58
- Rechtssystem, 11, 12, 76
- Regelfläche, 117
  - erzeugende Gerade der, 117
  - Leitkurve der, 117
- Richtungsvektor, 15
- RIEMANNscher Krümmungstensor, 99
- Rotationshyperboloid, 116
- Rotationszylinder, 106
- Satz
  - von FROBENIUS, 98
  - von GAUß und BONNET, 133
  - von HOPF, 60
- Schmiegebene, 35
- Schnittwinkel, 81
- Schraubenlinie, 30
- Schraubentorse, 120
- skalares Produkt, 10
- Spatprodukt, 14
- Stützvektor, 15
- Standard-Topologie, 19
- Streckebene, 35
- Summenkonvention, 9
- Tangente, 26
- Tangentenbasisvektoren, 72
- Tangentenfläche, 119
- Tangentenindikatrix, 58
- Tangentenvektor, 26, 34
- Tangentialebene, 73
- Tangentialraum, 26, 73
- Theorema egregium, 101
- Theorema Elegantissimum, 131
- Topologie, 18
  - Flächensatz der, 134
- Torse, 119
- Torsion, 39
- Torus, 116, 135
- totale Absolutkrümmung, 95
- Totalkrümmung, 59
- Transformation
  - linear, 24
- Translationsraum, 11
- Umgebung, 19
- Umlaufzahl, 59
- Vektor, 7
  - Einheits-, 10
  - Krümmungs-, 89
  - linear unabhängig, 8
  - orthogonal, 11
- Vektoren
  - Heben, 17
  - Senken, 17
- Vektorfunktion, 22
- Vektorprodukt, 12
- Vektorraum, 7
- WEINGARTEN-Abbildung, 84
- Wendelfläche, 120
- Wendepunkt, 47
- Windung, 39
- Winkelfunktion, 51, 58
- Zykloide, 65