

Futures Issue

글 김태선(현대선물 금융공학팀 팀장)

외환위기 이전에는 금리자유화 미흡, 장단기금융시장 분할, 금융시장에 대한 규제 등으로 인해 정상적인 금리의 기간구조가 형성되지 못하였다. 그러나 외환위기 이후 금리의 기간구조가 우상향 형태를 보이고 장단기금리의 동행성 강도가 재차 강화되면서 선진국형 수익률 곡선을 나타내고 있다.

금리는 당시의 실질금리, 예상 인플레이션 뿐만이 아니라 만기의 차이나 지급불능 위험에 따른 프리미엄 등에 의해 결정된다. 따라서 만기와 함께 상승 또는 하락을 하기도 때문에 여러 가지 다양한 형태를 나타낸다.



Yield Curve Fitting과 채권 운용전략

들어가는 말

채권거래에 있어 이자율 기간구조 추정은 시장참가자들에게 공정가격 산정 및 투자전략수립에 있어서 반드시 선행되어야 할 기본적인 채권운용의 인프라이다. 특히 채권 관련 파생상품의 상장과 맞물려 채권포지션의 위험관리에 매우 중요하다. 국내의 경우 1998년 채권시가평가 도입과 2000년 국제통합발행제도 도입 이후 이자율의 기간구조추정에 대한 많은 연구가 이루어져 왔다. 동시에 Money Market과 Bond Market간의 시장연계성이 IMF 이후에 강화되고 있어 장단기 금융시장간 연계성은 날로 증가하고 있는 실정이다.

일반적으로 만기 1년 미만 금리를 의미하는 단기금리는 통화정책이나 시장상황에 민감하게 반응하는데 비해 1년 이상의 장기금리는 일시적인 변화보다는 미래 단기금리의 예상, 경제상황에 대한 기대를 바탕으로 형성된다. 이를 근거로 장단기 금융시장간의 재정거래가 활발하고 이자율의 기간구조가 정상적으로 작동할 경우 통상적으로 단기금리의 변동성이 장기금리의 변동성보다 크게 나타난다. 외환위기 이전에는 금리자유화 미흡, 장단기금융시장 분할, 금융시장에 대한 규제 등으로 인해 정상적인 금리의 기간구조가 형성되지 못하였다. 그러나 외환위기 이후 금리의 기간구조가 우상향 형태를 보이고 장단기금리의 동행성 강도가 재차 강화되면서 선진국형 수익률 곡선을 나타내고 있다. 이와 같이 외환위기 이후 정상적인 금리기간구조가 형성된 것은 금리중심의 통화정책으로의 전환, 장단기 금융시장의 연계성 강화, 채권시장 하부구조의 개선 등에 기인한 것이다.

Yield Curve 개념 및 체계

정부가 발행한 무이표채들의 만기와 만기수익률의 관계를 나타내는 곡선을 만기수익률곡선(Yield Curve) 혹은 줄여서 수익률곡선이라 한다. 즉, 만기에 따른 현물금리들을 그래프로 보여준 것을 말한다. 이 곡선은 또한 기간(만기)에 따른 금리(수익률) 값의 수준을 나타낸다는 의미에서 '이자율 기간구조(The Term Structure Of Interest Rates)' 라고도 불린다. 금리는 당시의 실질금리, 예상 인플레이션 뿐만이 아니라 만기의 차이나 지급불능 위험에 따른 프리미엄 등에 의해 결정된다. 따라서 만기와 함께 상승 또는 하락을 하기도 때문에 여러 가지 다양한 형태를 나타낸다. 그러나 일반적으로 볼 때 가장 대표적으로 나타나는 형태는 상향 수익률곡선, 하향 수익률곡선, 수평 수익률곡선, 그리고 언덕형 수익률곡선 형태로 요약할 수 있다.

상향 수익률곡선은 역사적으로 가장 보편적인 수익률 곡선의 형태이지만 시장의 상황에 따라 다른 3가지 형태로 변형되기도 한다. 1997년 말 외환위기 발생초기에는 장기금리가 단기금리보다 낮아져서 하향 수익률 곡선 형태가 나타났었다.

〈표 1〉

만기(t)	액면금리
1	3.00%
2	3.50%
3	4.00%
4	4.50%

수익률 곡선은 현물금리들을 그래프로서 나타낸 것이지만 실제 시장에서 현물 금리들이 다 주어지는 것이 아니다. 수익률 곡선을 구성하는 다양한 만기의 채권 들이 시장에서 거래되고 있으면 현물금리들을 시장에서 바로 구할 수 있지만 실 제 시장에서는 다양한 만기의 채권들이 거래되지 않고 있다. 따라서 시장에서 값 을 구할 수 없는 경우 단기 상품의 현물금리(Spot Rate)와 이표채의 현재가를 이 용하는 Bootstrap 방법을 사용한다.

Bootstrap 방법을 사용하여 수익률 곡선(Yield Curve)을 구하는 방법을 살펴보 면 시장에서 거래되는 만기 1, 2, 3, 4년의 액면가 채권의 액면금리가 다음과 같이 주어지고 이자 지급은 연간 1회이고 모든 채권의 액면가는 100으로 가정한다(〈표 1〉 참조).

이 때 동일한 만기의 현물금리들을 구하여 보자. 먼저 액면금리 3.0%의 만기 1 년 액면가 채권으로부터 1년 현물금리 r(1)을 구하여 보자.

$$100 = \frac{103}{1+r(1)}$$

이 식으로부터 r(1)의 값 3.0%를 구할 수 있다. 다시 r(2)를 구하기 위해 만기 2년 액면가 채권을 이용하여 보면 다음과 같다.

$$100 = \frac{3.5}{1+r(1)} + \frac{103.5}{(1+r(2))^2}$$

위에서 구한 r(1)값을 이용하면 r(2) = 3.51%가 산출된다. 다음 r(3)을 구하 기 위해서 만기 3년의 액면가 채권을 이용하면 같은 방법으로 구할 수 있다.

Yield Curve 결정 이론

1. 순수기대 가설 (Pure Expectations Hypothesis)

순수기대 가설은 미래시점의 예상 금리 값에 따라 현재의 장기 현물금리 값이 결정된다는 가설이다. 즉, 시장 투자자들의 미래 금리수준에 대한 예상이 반영되 어 장기 현물금리 수준과 수익률 곡선 형태가 결정되며 이것이 유일한 요인이라 는 가설이다. 이를 수식으로 표현하면 아래와 같다.

$$[1+r(n)]^n = [1+r(1)] \times [1+E[r(1, 1)]] \times [1+E[r(1, 2)]] \times \dots \times [1+E[r(1, n-1)]] = \prod_{t=0}^{n-1} [1+E[r(1, t)]]$$

E[•] : 현재시점에서의 미래금리에 대한 기대값

r(n) : n년 만기 현물금리

r(1,n) : n년 후의 만기 1년 현물금리의 확률 변수

2. 유동성 선호 가설 (Liquidity Premium Hypothesis)

유동성 선호 가설은 순수기대 가설이 간과한 부분 - 투자자들의 리스크 회피 현상 - 을 감안한 가설이다. 장기채의 경우 단기 채권에 비하여 투자원금 및 이자 지급에 대한 위험이 더 크며 미래금리 변화에 따른 채권가격 불확실성이 커짐에 따라 이를 보상할 프리미엄이 요구된다는 것이다. 즉, 장기 채권의 현물금리는 시 장에서 예상하는 미래 단기금리의 기대값에 일정한 리스크 프리미엄이 가산된 값 으로 결정된다는 이론이다.

3. 시장분할 가설 (Segmented Markets Hypothesis)

시장분할 가설은 장기금리는 장기채권에 대한 수요에 의해, 단기금리는 단기채 권에 대한 수요에 의해 결정되므로 장기금리와 단기금리 간에 특별한 관계가 존 재하지 않는다는 가설이다. 그 이유는 채권시장의 각 투자자마다 자신이 선호하 는 만기의 채권에만 주로 투자하기 때문으로 해석하고 있다. 그러나 과거 채권시 장에서 나타난 만기가 상이한 채권들간의 동조 현상을 설명하지 못하는 약점을 갖고 있다.

4. 선호시장 가설 (Preferred Habitat Hypothesis)

선호시장 가설은 기대가설과 시장분할 가설이 설명하지 못하는 시장 현상을 보 완한 가설로 이에 따르면, 장기채 수익률은 동 채권의 만기 동안에 발생하는 단기 수익률의 평균값에 동 채권 수요를 감안한 위험 프리미엄을 가산한 것과 같다. 다 만, 투자자가 선호하지 않는 만기의 채권에 대해서도 적절한 위험 프리미엄이 제 시되면 투자할 수 있다는 점이 시장분할 가설과의 차이점이며, 투자자가 선호하 는 채권시장이 단기채권일 경우에는 유동성 선호 가설과 같은 결론을 갖게 된다.

Yield Curve 추정 모형

1. Nelson-Siegel 모형

Nelson-Siegel(1987)은 비스플라인 방법으로 할인함수 혹은 수익률곡선을 함수 형태의 추정 방법론으로 순간선도 금리가 두개의 같은 해를 갖는 2차 차분방정식 의 해로 가정하고 있다. 동시에 Nelson-Siegel 모형은 단순한 함수형태를 가지고 있지만 다양한 형태의 수익률 곡선을 만들어 낼 수 있는 것으로 알려져 있다. 이 는 모형이 수준(Level), 기울기(Slope), 그리고 곡도(Curvature)의 세 가지 요인을 포함하고 있기 때문이다. Nelson-Siegel 모형은 다음과 같은 선도이자율함수로부터 유도된다.

추정해야 할 모수는 $\theta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1)$ 이며 m은 선도계약의 결제일이다.



현물이자율과 선도이자율의 관계와 현물이자율의 수익률곡선은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Z(m)_t = \beta_{1t} + \beta_{2t} \frac{1 - e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1} + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1} - e^{-m/\tau_1} \right)$$

Nelson-Siegel 수익률곡선에 의하면 $\tau \rightarrow 0$ 인 경우, 할인함수의 값이 1에서 시작하여 $\tau \rightarrow \infty$ 인 경우에는 할인함수가 0의 값에 수렴하므로 수익률곡선의 기본적인 성격을 만족시킨다. 이제 Nelson-Siegel 모형의 모수에 대해 살펴 보면,

상기 식 $\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}$ 는 요인(Factor)변수로 해석할 수 있다. 우선 우변의 상수항 β_{1t} 에 대한 요인계수(Factor Loading)는 상수 1이다. 이는 $\tau \rightarrow \infty$ 라 하더라도 0으로 감소하지 않고 모든 만기에 대해 동일하게 영향을 미친다. 따라서 β_{1t} 는 장기적 수준(Level)으로 해석할 수 있다. 즉 β_{1t} 값의 증가는 그 요인계수가 모든 만기에 대해 동일하기 때문에 수익률곡선의 수준을 증가시키게 된다.

보다는 굴곡이 심하지 않다는 장점은 있으나, 단기의 채권 유통 데이터로부터 장기의 Yield Curve를 구해야 한다는 단점이 있다. Svensson(1994년)은 이러한 단점을 극복하면서 장기영역의 왜곡에 대한 설명력을 높이기 위해 β_{4t} 라는 모수를 추가하여 Nelson & Siegel Model을 확장시켰다. Nelson-Siegel & Svensson Model(이하 NSS Model)은 단순한 형태로 인해 실제로 많은 중앙은행들이 원데이터로부터 현물이자율의 Yield Curve를 추출하는데 사용되어지고 있다.

$$Z(m)_t = \beta_{1t} + \beta_{2t} \frac{1 - e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1} + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1} - e^{-m/\tau_1} \right) + \beta_{4t} \left(\frac{1 - e^{-m/\tau_2}}{m/\tau_2} - e^{-m/\tau_2} \right)$$

NSS모형의 경우 단기영역이 장기영역까지 커버하는 문제점을 제거함에 따라 장기영역의 추적오차를 최소화함과 동시에 수준(Level), 기울기(Slope), 곡도1(Curvature1), 곡도2(Curvature2)로 세분화시켜 Yield Curve를 분해하고 있다. 이는 Yield Curve가 Twist되거나 영역별 Hump 정도 및 부호가 반대일 경우 설명력을 제고시킬 수 있다.



Yield Curve Fitting

NSS Model은 대표적인 Yield Curve Fitting 모형이다. 동시에 Non-Spline 추정방법으로 기존의 Spline 추정처럼 굴곡이 심하지 않다는 점과 추정모수는 최소자승법(OLS)로 잔차에 대한 추정오차의 최소화를 목적함수로 삼고 있다.

β_{2t} 에 대한 요인계수는 $\frac{1 - e^{-m/\tau}}{m/\tau}$ 이다. 이는 1에서 시작하여 τ 가 증가할수록 점점 감소하여 $\tau \rightarrow \infty$ 에는 0의 값을 가진다. 따라서 β_{2t} 는 만기가 짧은 이자율에 주로 영향을 미치는 단기요인으로 해석할 수 있다. 이 단기요인은 수익률곡선의 기울기(slope)와 밀접하게 연관되어 있다. 즉 β_{2t} 값의 증가는 만기가 긴 이자율보다는 만기가 짧은 이자율을 더 증가시키게 되어 수익률곡선의 기울기를 변화시킨다.

β_{3t} 에 대한 요인계수는 $\frac{1 - e^{-m/\tau}}{m/\tau} - e^{-m/\tau}$ 이다. 이는 0에서 시작하여 τ 가 증가할수록 점점 증가하다가 다시 감소한다. β_{3t} 는 만기가 아주 짧거나 아주 긴 이자율에 미치는 영향은 작고 만기가 중간인 이자율에 미치는 영향이 상대적으로 크다. 즉 β_{3t} 값의 증가는 만기가 중간인 이자율을 상대적으로 더 증가시켜 결국 수익률곡선의 곡도(Curvature)를 변화시킨다. t 시점의 수익률곡선은 수준, 기울기, 곡도의 3요인의 선형결합으로 표현된다.

2. Nelson-Siegel-Svensson 모형

Nelson & Siegel Model은 Spline 방법을 사용하지 않았기 때문에 전체적인 Yield Curve의 모양이 Spline 방법을 사용한 것

목적함수	$\min \left[\sum_{i=1}^n (w_i \epsilon_i)^2 \right]$
	$w_i = \frac{1/D_i}{\sum_{j=1}^n 1/D_j}$
	$\epsilon_i = p_i^{\hat{}} - p_i$
제약조건	$0 \leq z(m_{\min})$
	$0 \leq z(m = \infty)$
	$\exp(-z(m_k)m_k) \geq \exp(-z(m_{k-1})m_{k-1}) \forall m_k < m_{\max}$

채권가격을 기준으로 해서 수익률곡선을 추정할 경우에는 만기가 짧은 채권일수록 채권가격의 이자율 탄력성이 낮기 때문에 수익률곡선의 단기영역(Short-End)에서는 수익률기준으로 비교적 큰폭의 오차가 발생하는 반면에 가격의 경우 오차가 상

대적으로 작게 된다. 여기에 기간구조별 가중치를 듀레이션의 역수를 취함으로써 추적오차 극소화를 목적함수로 하고 있다.

한편 채권가격 오차의 극소화 대신 채권의 수익률 오차를 최소화시키는 방법은 비선형함수를 최소화시키는 알고리즘이 복잡하여 수렴의 문제점이 있다. 동시에 수익률 곡선의 장기영역에서 상대적으로 큰 추적오차가 존재한다.

제약조건의 경우 Zero Rate는 항상 0보다 크다는 조건, 만기 구조는 무한대까지 확장할수 있다는 것과 모든 만기에 대해서 만기가 길수록 할인계수 값은 작아진다는 제약조건을 만족시키는 최적해를 추정하게 된다.

실증적 분석

효율적인 추정을 위해서는 이자율 기간구조에 대한 Data Base 및 Yield to Maturity의 기준마련이 선행되어야 한다. 이자율 기간구조별 시계열자료를 기준으로 횡단면 접근을 통해 시장에서 호가되고 있는 수익률과 모형을 통해 추정된 수익률 데이터를 이용, 각각의 채권가격을 산정하여 적절한 Valuation을 평가한다.

NSS모형에 근거한 추정으로 추정해야 할 변수는 Level, Slope, Curvature1, Curvature2, Tau1, Tau2로 6개의 추정모수를 추정함과 동시에 이들 변수들에 대한 시계열 데이터 생성도 가능하게 된다.

$$z(m) = 0.1167 - 0.0842 \left[\frac{1 - e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1} \right] - 0.3510 \left[\frac{1 - e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1} - e^{-m/\tau_1} \right] + 0.2549 \left[\frac{1 - e^{-m/\tau_2}}{m/\tau_2} - e^{-m/\tau_2} \right]$$

2005년 4월 7일 시장 데이터를 이용하여 추정한 결과 Level(+0.1167), Slope(-0.0842), Curvature1(-0.3510), Curvature2(+0.2549), Tau1(+0.4978), Tau2(+0.4087)로 추정되었다(〈그림 1〉 참조).

상기 그래프는 추정된 계수에 변수들을 고려하여 이자율 기간구조를 감안한 Plot차트로 Comp1~4까지의 합이 수익률 곡선으로 나타나고 있다. 결국 Yield Curve의 유형을 결정짓는데 있어 각 요소별로 분해를 한 것이다.

분해 결과 시장과 모형간의 오차 최소화를 목적함수로 함에 따라 시간별 채권의 과대·과소를 결정짓는 상대가치차원(Relative Value Trading)에서의 접근도 가능하게 된다(〈표 2〉 참조).

Relative Value Trading 차원에서 이자율 기간구조를 대표하는 채권가치평가 결과 KTB0450-0603(1Y)채권의 경우 모형대비 저평가로 인해 매수포지션, KTB0425-0803(3Y)은 고평가로 매도포지션, KTB0350-0912(5Y)은 저평가로 매수포지션을

〈표 2 Cheap & Rich Bond (05. 04. 07)〉

Term Structure	Market Price	Model Price	Duration	Weights	(cheap) / rich
KTB 0450-0603	101.01	101.19	0.9002	0.3422	-0.18%
KTB 0475-0703	102.04	102.07	1.8379	0.1676	-0.03%
KTB 0375-0709	99.96	99.79	2.3346	0.1319	0.17%
KTB 0425-0803	101.28	100.89	2.7744	0.1110	0.39%
KTB 0450-0906	102.87	102.58	3.8054	0.0809	0.29%
KTB 0350-0912	98.41	99.05	4.2765	0.0720	-0.64%
KTB 0664-1207	114.08	114.40	5.9195	0.0520	-0.32%
KTB 0525-1403	104.31	103.96	7.2734	0.0423	0.35%

취할수 있다. 결국 바벨(Wing)포지션과 블릿(Body) 포지션의 합성인 버터플라이 롱포지션으로 우상향의 강도가 심화될 경우 Market Neutral하에서 무위험 차익의 확보가 가능하게 된다(〈그림 2〉 참조).

맺음말

NSS Model은 대표적인 Yield Curve Fitting 모형이다. 동시에 Non-Spline 추정방법으로 기존의 Spline 추정처럼 굴곡이 심하지 않다는 점과 추정모수는 최소자승법(OLS)로 잔차에 대한 추정오차의 최소화를 목적함수로 삼고 있다. 모형상 단점으로는 단기 Rate를 중심으로 장기영역까지 확장하여 추정함에 따라 장기로 갈수록 추정오차가 확대될 수 있다는 점이다.

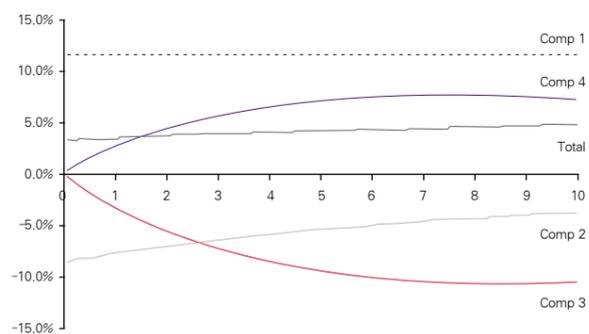
NSS Model은 Yield Curve를 Long-term Level, Slope, Curvature의 3가지 구성 요소로 분해함으로써 Yield Curve Trading에 있어서 체계적이고 효율적인 전략수립이 가능하다. 추정방법은 Cross-Sectional Estimation으로 매 시점마다 잔차 극소화를 위한 계수 추정방법으로 관찰치에 대한 제약요인은 없는 것이다. 결국 NSS모형을 기준으로 6개의 추정계수는 시계열 자료로 생성, 관리될 수 있다. 추정에 있어 Input Data는 Market에서 호가되는 실질적인 데이터를 기준으로 함에 따라 최대한 시장 정보를 반영하는 모형이다. 동시에 이자율 기간구조에 대응하는 Rate의 추정이 가능하며 경과물에 대한 상대가치의 척도기준도 제공한다. 채권운용 전략에 있어 래더, 바벨, 블릿, 버터플라이 등 다양한 전략수립에 있어 시장 Indicator로서 Valuation의 기준을 제공한다. 장단기 스프레드 정도인 Slope와 Yield Curve의 곡도를 나타내는 Hump등 Term Structure별 강도를 알수 있어 단기, 중기, 장기, 영역별 채권 포트폴리오의 체계적 관리 및 투자 전략수립이 가능하다.

한편 NSS Model을 기준으로 기간구조의 형태를 보이는 IRS, CRS, Swap Spread(IRS-KTB), Basis Swap(CRS-IRS), Basis Swap Spread(CRS-KTB), FX Swap Spread까지도 확장하여 적용할 수 있어 다양하고 입체적으로 응용할 수 있다. 결국 다양한 이중 파생상품 및 한미간 금리차를 이용하는 등 적절한 스프레드 레벨대에 대한 전략적 대응도 모색해 볼 수 있다.

보다 효율적이고 전략적인 접근을 위해서는 각 기간구조별 변동성 추정을 통해 추정된 Yield Curve를 중심으로 변동성이 반영된 레인지를 추가로 추정하거나 허용할 수 있는 신뢰 수준을 반영한 확률적인 접근도 고려할 만하다. 결국 허용될 수 있는 Cut-Off Point를 기준으로 한 포지션 설정으로 Market Neutral Profit이 가능하며 Mean Reverting의 강도가 Profit의 크기를 결정하게 된다.

본고는 NSS Model에 대한 전반적이고 개괄적인 내용을 간략하게 정리하였다. 대부분의 선진 투자은행들은 Yield Curve에 대한 추정 및 관리 모델들을 보유하고 있다. 특히 장기물 발행비중이 높아짐에 따라 보다 체계적이고 과학적인 운용전략의 수립을 위해서는 Yield Curve Fitting 및 Forward Rate에 대한 효율적인 추정이 요구된다.

〈그림 1 Yield Curve Decomposition〉



〈그림 2 Relative Value Trading〉

