(A형/B형 4회 29번 연역적 풀이 해설) - Made by 포카칩

먼저, $a_{2^n}=2^{n-1}$ 또는 $a_{2^n}=2^n$이 반드시 성립함을 보이자.

$a_1=1$, $a_2=2$이므로 성립한다.

a_{2^k}이 성립한다고 가정하자. ($k \geq 2$)

(i) $a_{2^k}=2^{k-1}$인 경우 : $a_{2^k+1}=2^k$, $a_{2^k+2}=2^{k+1}$, $\cdots$, $a_{2^{k+1}-1}=2^k$, $a_{2^{k+1}}=2^{k+1}$이다.

(ii) $a_{2^k}=2^k$인 경우 : $a_{2^k+1}=2^{k+1}$, $a_{2^k+2}=2^k$, $\cdots$, $a_{2^{k+1}-1}=2^{k+1}$, $a_{2^{k+1}}=2^k$이다.

따라서, $a_{2^n}=2^{n-1}$ 또는 $a_{2^n}=2^n$이다.

한편, (ii)에서 $a_{2^n}=2^n$이면 $a_{2^{n+1}}=2^n$이고, (i)에서 $a_{2^{n+1}}=2^n$이면 $a_{2^{n+2}}=2^{n+2}$이다.

$a_2=2$이므로, n이 홀수이면 $a_{2^n}=2^n$이고, n이 짝수이면 $a_{2^n}=2^{n-1}$이다.

한편, $f(2^8)-f(2^7)=a_{2^7+1}+a_{2^7+2}+\cdots+a_{2^8}$이다.

$a_{2^7}=2^7$이므로 위의 (ii)에 해당한다.

따라서,

$$a_{2^7+1}+a_{2^7+2}+\cdots+a_{2^8}=2^8+2^7+2^8+2^7+\cdots+2^8+2^7=2^6(2^8+2^7)=2^{14}+2^{13}$$

이다.