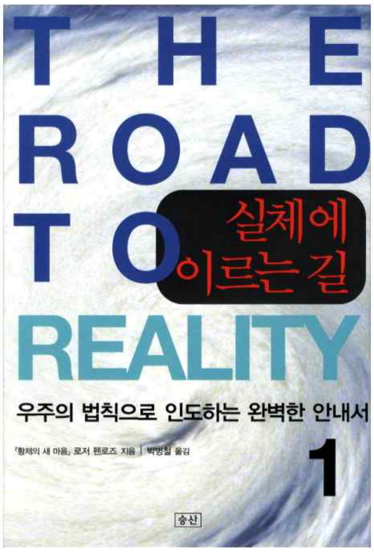
실체에 이르는 길

우주의 법칙으로 인도하는 완벽한 안내서 1



서문

p18 : 우리의 관심은 단연 우주를 지배하는 근본 법칙일 것이다.

p19 : 간단한 분수 덧셈조차 부담스러워 하면서 최첨단 과학이론을 이해하는 것은 현실적으로 불가능하다.

p21 : 분수자체의 의미. 3/8은 3을 위에, 8을 아래에 놓고 이들 사이에 짧은 수평선을 그어 놓은 것

p23 : 일단 정의를 하고 나면 더는 머릿속에 담아둘 필요가 없다. 분수뿐만 아니라 대부분의 수학적 개념도 이와 비슷한 속성을 가지고 있다.

p24 : 물리학 법칙을 깊이 이해하려면 어쩔 수 없이 수학을 도입해야 한다.

p26 : 실험이나 관측결과에 부합되지 않는 이론은 수학적 체계가 아무리 아름답다고 해도, 과학의 전당에서는 설 자리가 없다.

입문

p44 : 이 세상을 지배하는 것은 신화나 미신이 아니라 수와 기하학이라는 것이다.

1. 과학의 뿌리

p45 : 우주를 지배하는 법칙은 무엇인가?

p48 : 자연을 지배하는 진정한 힘을 이해하는 첫 번째 단계는 순수한 '추정'에서 '사실'을 찾아내는 일로부터 시작된다.

- 탈레스 : 수학적 사고의 기초를 다짐

- 피타고라스 : 증명이라는 개념을 최초로 도입

p50 : ‘수학적 증명’이란 무엇인가? 진리로 확립된 수학적 주장이나, 진리임이 자명한 공리에 기초하여 새로운 주장의 타당성을 입증하는 행위

- 이런 식으로 확립된 수학적 주장을 ‘정리’라고 한다.

p51 : 자명한 수학적 진리, 즉, 공리라 불리는 이 주장들은 증명과정을 거치지 않은 채 유클리드 기하학을 떠받치는 기초가 되었다.

- 현대 기하학은 이보다 훨씬 정교하기 때문에 기하학적 주장을 펼칠 때에는 공리의 타당성을 충분히 검토해야 한다.

- 플라톤 : 타당성이란 무엇인가? 수학적 명제는 실제의 물리적 대상과 일치하지 않는다. 명제란, 실존하는 대상을 이상화했을 때 성립하는 것이다. 즉, 이상화된 세상은 물리적 세계와 전혀 다른 세계에 존재한다.

p52 : 플라톤의 사고는 현대과학의 갈 길을 안내하는 청사진 구실을 해왔다. 앞으로도 과학자들은 우주를 서술하는 이상적인 모형을 가정한 다음, 관측과 실험결과와 비교하여 수정을 가하는 식으로 연구를 진행할 것이다. 모형이라는 것이 수학적으로 이상화되어 있는 추상적인 개념이라는 것이다. 검증이 가능하려면 모형은 수학적으로 정확하게 정의되어야 한다.

p55 : 수학적 주장 중에는 주관적인 견해에 따라 진위가 판가름 나는 것도 있다. ‘선택공리’가 그 대표적인 사례이다. 대부분의 선택공리를 명백한 진리로 간주하지만, 회의적인 생각을 품고 있는 수학자도 있다.

p57 : 어떤 수학적 주장이 플라톤적 존재라고 말하는 것은, 그것이 수학적 객관성을 완벽하게 갖추고 있다는 뜻이다.

2. 고대의 정리와 현대의 질문

p75 : 유클리드는 공리와 공준을 엄밀하게 구분하였는데, 점, 선의 정의처럼 그 개념이 너무도 자명한 것이 ‘공리’이고, 공리만큼 자명하지 않은 가설을 공준이라 한다. 유클리드는 공준을 모두 다섯 개로 정리하였는데, 그 중 다섯 번째 공준은 다른 공준보다 자명하지 않다.

p75 : 유클리드 공준

① 임의의 두 점은 직선으로 연결될 수 있으며, 이 직선은 단 하나뿐이다.

② 임의의 선분은 양쪽으로 무한히 길게 확장될 수 있다.

③ 임의의 점을 중심으로 임의의 반지름을 갖는 원이 존재한다.

④ 모든 직각은 동일하다.

⑤ 임의의 직선과 그 직선위에 놓여있지 않은 임의의 점이 주어졌을 때, 이 점을 지나면서 주어진 직선과 평행한 직선이 반드시 존재한다.

p78 : 네 개의 각이 직각이고 네 변의 길이가 같은 도형이 정사각형임을 증명하려면, 다섯 번째 공준을 반드시 적용해야 한다.

p82 : 쌍곡기하학 : 평행선 공준이 성립하지 않는 기하학 체계로서, 피타고라스 정리가 성립하지 않고, 삼각형 내각의 합도 π가 아니다.

- 유클리드 평면상의 모든 점은 원의 내부에 있는 점으로 대응하는 구조이다.

p83 : 이 기하학 체계에서 거리라는 개념은 유클리드 기하학에서 말하는 거리와 전혀 다르다.

- 공간의 경계선이나 외부공간이라는 개념이 아예 존재하지 않는 것이다.

p101 : '우주공간의 평균적 기하학은 유클리드 적이다'라는 주장이 널리 퍼져있긴 하지만, 엄밀히 말해서 정확하게 알려진 내용은 아무것도 없다.

p103 : 물리적 우주를 이해하는데 쌍곡기하학이 결코 부정하지 못할 중요한 역할을 한다는 사실이다.

3. 물리적 세계에 존재하는 수

p108 : 피타고라스 학파는 그들이 개발한 모든 기하학이 유리수로 표현되기를 내심 기대하고 있었다. 만일 모든 기하학이 유리수만으로 표현된다면, 기하학을 이해하기도 그만큼 쉬워질 것이다.

p109 : 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 대각선의 길이는 피타고라스 정리에 의하면 제곱해서 2가 되는 수가 된다. 만일 이 길이에 해당하는 유리수가 존재하지 않는다면, 오로지 유리수에만 의존해온 기하학에는 일대 재난이 일어난다. 피타고라스와 그의 추종자들은 어떻게든 이 길이를 기존 유리수로 표현해 보려고 노력하였으나, 모두 허사로 끝나고 말았다.

p112 : 고대 그리스 수학자들은 2의 제곱근을 범주 안에 집어넣기 위하여 어쩔 수 없이 수의 범위를 확장해야 했다. 이렇게 해서 탄생한 것이 바로 '실수(real number)' 개념이다.

p113 : 분수를 십진 표기법으로 표기했을 때, 소수점 아래로 나타나는 숫자들은 고유한 주기성을 가진다.

p114 : 십진표기법을 사용하지 않았던 고대 그리스인은 그들 나름대로 무리수 표기법을 개발하였다. 그들이 사용했던 방법은 오늘날 '연분수(continued fraction)'로 알려져 있다.

$$a+(b+(c+(d+\dots)^{-1})^{-1})^{-1} = a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\dots}}}$$

p115 : 연분수 표기법에서 궁극적으로 주기성이 나타나는 수는 어떤 수인가? 18세기 수학자 조제프 라그랑주(Joseph C. Lagrange)는 다음과 같이 결론 내린다.

'연분수로 표현했을 때, 자연수 부분에서 궁극적으로 주기성이 나타나는 수는 2차 무리수(quadratic irrational number)'이다. 2차 무리수란 다음과 같은 형태로 표기할 수 있는 수이다.

$$a+\sqrt{b}$$

여기서 a, b는 분수이며, b는 완전제곱수가 아니다.

p120 : 극한값을 구하는 기법은 수학의 여러 개념을 확립하는데 결정적인 역할을 했다. 만일 이 기법이 개발되지 않았다면, 실수는 지금처럼 막강한 위력을 발휘하지 못했을 것이다.

p123 : 실수의 역할이 가장 두드러졌던 분야는 물리학 이론이 아니라 미적분학(calculus)이었다. 모든 역학 이론이 미적분학으로부터 탄생했다고 해도 과언이 아니다. 그런데 미적분학을 가능하게 만든 주역은 다름 아닌 실수체계였다.

p124 : 양자역학이 상용화된 오늘날에도 시간과 공간, 에너지가 극미의 영역에서 불연속이라는 증거는 발견되지 않았으며, 이를 주장할 만한 이론적 근거도 없다.

p125 : 고대 그리스 인들은 음수를 수로 취급하지 않았다.

p126 : 고대 그리스 인들은 0을 수로 취급하지 않았다. 수의 체계에 0을 처음으로 도입한 사람은 7세기 인도의 수학자 브라마굽타 이다.

- 자연수는 눈앞에 보이는 사물의 개수를 세기 위해 도입된 개념이다. 따라서 셀 대상이 없으면 자연수의 의미도 사라진다.

p128 : 데데킨트는 실수체계를 구축할 때 자연수가 아닌 유리수를 사용하였다.

p129 : 정수가 물리적 세계와 직접적으로 연관되어 있다는 사실이 지난 20세기에 와서야 발견된 것은 정말로 놀라운 일이 아닐 수 없다,

p131 : 복소수가 처음 발견된 때는 16세기(1500-1600)였으나, 수백 년 동안 천덕꾸러기 취급을 받다가 "수학적 사고에 필수적이며, 불가능을 가능하게 하는 마술 같은 수" 라는 사실이 수학계에 알려지고 나서야 가장 중요한 수로 떠올랐다.

p132 : 복소수가 위력을 발휘하는 분야는 수학뿐만이 아니다. 극미세계의 물리학에서 전례를 찾아볼 수 없을 만큼 중요한 역할을 하며, 물리적 우주와 수학이 하나로 수렴한다는 놀라운 사실을 다른 어떤 수보다도 극명하게 보여주고 있다.

4. 마법 같은 복소수

p137 : -1의 제곱근은 복소수 형태로 존재한다. 그런데 실수를 복소수로 확장하는 과

정은 유리수를 확장하는 과정보다 훨씬 쉽다.
p138 : i를 도입하는 것뿐이다. i는 -1의 제곱근으로서, 실수체계와 결합하여 다음과 같은 형태의 복소수체계를 이룬다.

$$a+ib$$

p139 : $a+ib$는 하나의 복소수일 뿐, a와 b로 이루어진 한 쌍의 수가 결코 아니라는 점이다. 그래서 수학자들은 알파벳 z를 동원하여 $z=a+ib$로 표기한다.
p140 : 복소수는 수학자들이 수의 범위를 넓히려고 노력하는 과정에서 인위적으로 탄생한 수였다.
p141 : 복소수의 첫 도입 이후, (17세기 르네 데카르트가 처음으로 '허수'라는 용어를 사용) 350년간, 우리에게 복소수의 마법은 그저 수학 안에서 일어나는 일일뿐이었다. 1920년대부터 본격적으로 발동이 걸린 양자역학이 밝혀낸 '극미세계 물리학은 복소수의 지배를 받는다'는 놀라운 사실은 복소수에 회의적인 생각을 품었던 모든 이에게 큰 충격이었다.
p142 : 우리는 복소수의 제곱근뿐만 아니라 세제곱근, 5제곱근, π제곱근, 심지어는 i제곱근까지 계산할 수 있다.
p146 : 무한급수의 합은

$$1+x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots=(1-x^2)^{-1}$$

p150 : $1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots=(1+x^2)^{-1}$
p153 : 실수 x를 복소수 z로 확장하여 정리하면 다음과 같다.

$(1-x^2)^{-1}$는 $x=+1$, $x=-1$에서 함숫값이 무한대(특이점)가 됨

$(1+x^2)^{-1}$는 무한대가 되는 특이점이 없다.

$(1-z^2)^{-1}$는 $z=+1$, $z=-1$에서 함숫값이 무한대(특이점)가 됨

$(1+z^2)^{-1}$는 $z=+i$, $z=-i$에서 함숫값이 무한대(특이점)가 됨

p154 : 두 경우, 모두 '원점을 중심으로 하고 반지름이 1인 원'으로 수렴원이 주어진다. 수렴원 내부에 있는 z에 대해서는 유한한 값이 얻어지고, 수렴원 외부에 있는 z를 대입하면 무한대로 발산한다. 경계선 상에 있는 z에 대하여 급수의 수렴여부를 따지는 것은 매우 미묘한 문제이다.
- 두 함수를 실함수로 표현했을 때에는 이러한 성질이 분명하게 드러나지 않았다. 따라서 복소수는 함수의 저변에 깔려있는 깊은 속성을 알아내는데 결정적인 역할을 한다.

5. 로그, 지수, 제곱근의 기하학적 성질

p159 : 복소수의 덧셈과 곱셈이 기하학적으로 어떻게 표현되는가?

- 덧셈은 '평행사변형 법칙'으로 곱셈은 '삼각형 닮음법칙'으로 표현된다.

p160 : 복소수의 덧셈과 곱셈을 "복소평면 전체를 자기 자신으로 보내는 다른 형태의 사상(mapping,변환,transformation)으로 생각해 보자.

p161 : 덧셈사상이 적용되면, 복소평면 상의 모든 점은 크기, 형태의 전환이나 회전없이 특정방향을 향해 '일괄적으로 이동한다.'

- 곱셈사상을 적용하면, '원점을 고정한 채 좌표를 통째로 회전시킨 후, 반지름 방향으로 길이를 잡아 늘이거나 수축시키는 변환'에 해당한다.

- 특히, $w=i$인 경우, 곱셈사상은 복소평면 전체를 반시계방향으로 90^0 만큼 회전시키는 변환에 해당한다. 이 변환을 연달아 두 번 적용하면 복소평면은 반시계방향으로 180^0만큼 돌아가게 되는데 이것은 단순히 원점에 대한 반전이다.

p165 : 두 복소수를 곱한 복소수의 편각은 각 복소수의 편각의 합과 같고, 절대값은 각 복소수의 절댓값을 곱한 것과 같다. 여기서 주목할 것은 복소수의 덧셈이 편각의 덧셈으로 바뀌었다는 점이다. 이것은 로그의 성질과 밀접하게 관련되어 있다.

p167 : 복소수 z에 대하여 b^z의 수학적 의미부터 정의해야 한다. 다음으로 두 복소수 w, z에서 동일한 관계 $b^{w+z} = b^w \times z^z$가 성립하는지 확인해야 한다.

p169 : 밑 b를 자연로그의 밑수인 e로 바꾸어보자.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \quad = 2.7182818285\ldots$$

- 지수함수 $f(z) = e^z$를 전개하면

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

p170 : 위 멱급수는 모든 z값에서 수렴한다. (수렴원의 반지름은 무한대이다.)

p171 : $w = e^z$에서 z를 극좌표 표현식으로 나타내면

$$z = \log r + i\theta$$

p172 : $e^{2\pi i} = 1$ 따라서 $e^{z+2\pi i} = e^z = w$

p173 : $w = e^z = e^{\log r + i\theta} = e^{\log r}e^{i\theta} = re^{i\theta}$

p177 : $i^i = e^{i \log i} = e^{i\frac{1}{2}\pi i} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.207879576$

- 여기서 $\log i = \frac{1}{2}\pi i$이며, $\log i$를 다른 값으로 정하면 다른 결과가 나올 수도 있다.

p178 : 방정식 $z^n = w$를 만족하는 n개의 해, 즉 $w^{1/n}$을 구할 수 있다.

- '1의 n제곱근'이라 불리는 단위원의 원주 위에 동일한 간격으로 배치되어 있는 n

개의 점을 나타내며, 이 점들을 직선으로 이으면 정n각형이 된다.
p181 : 입자의 상태를 연속적으로 360^{0} 회전시키면 '보존'은 원래의 상태로 완벽하게 돌아오게 되지만, '페르미온'은 720^{0}를 돌려야 원래 상대로 돌아온다.

6. 실함수의 미분과 적분

p185 : 미분은 주어진 한 점과 그 근방을 살핌으로써 어떤 양이 얼마나 빠르게 변하는지를 국소적으로 측정하는 수단이며, 적분은 전체적인 양을 측정하는데 주로 쓰이며, 국소적인 성질과는 전혀 무관하다. 여기서 놀라운 것은 미적분학의 기본 정리에 따르면 미분과 적분이 서로 역과정에 해당한다는 것이다.
p186 : 함수가 분명한 형태로 주어질 때, 미분은 아주 쉽게 수행할 수 있지만, 적분은 어려울 뿐만 아니라 심지어 아예 불가능할 때도 있다. 그러나 함수가 분명한 형태로 주어지지 않고 '변수에 대한 함수값'이 표의 형태로 주어지면 상황이 정반대로 달라져서 적분은 쉽고 미분은 어려워진다.
p198 : 만일 $f(z)$가 복소변수 z로 한번 미분가능하다면, 더 볼 것도 없다. 이 조건을 만족하는 $f(z)$는 무한번 미분가능하다.
p1201 : 함수를 낱낱이 풀어 헤쳐서 적나라하게 드러내는 것보다는 복소수를 동원하여 함수의 성질을 설명하는 편이 훨씬 수월하다.
p210 : 함수의 정확한 형태가 주어지지 않으면 미분이 몹시 어려워진다. 이에 반하여, 적분은 함수의 국소적인 성질보다 전체적인 형태에 따라 좌우되기 때문에 수치적 방법으로도 답을 쉽게 구할 수 있다.

7. 복소함수의 미분과 적분

p214 : 복소함수의 미분을 논하려면, 먼저 정의역에 포함된 임의의 점 z에서 복소곡선 $w=f(z)$의 기울기부터 정의하여야 한다. 여기서 z 그리고 $f(z)$는 복소수를 취한다. 복소함수의 기울기가 일관된 의미를 지니려면, 변수 z를 복소평면에서 근방의 다른 지점으로 이동시킬 때 $f(z)$가 코시-리만 방정식을 만족해야 한다.
p216 : 복소함수의 정적분은 다음과 같이 주어진다.

$$\int_{a}^{b} f(z)dz = g(b) - g(a)$$

p217 : 적분변수가 복소수로 확장되면 복소수 a에서 b에 이르는 경로는 무수히 많아진다. 적분변수 자체가 직선이 아닌 평면상에 분포하기 때문이다.
 - a와 b를 잇는 수많은 경로 중 하나를 선택하여 그 길을 따라 $f(z)$를 적분한 값은

주변의 다른 경로를 따라 적분한 값과 같다는 것이다.
 - 복소수의 정의역 안에는 구멍(hole)이 존재할 수 있는데($1/z$에서는 $z=0$일 때가 구멍이다.) 바로 이러한 구멍들 때문에 a에서 b로 가는 경로들은 모두 같을 수가 없다.
p218 : 하나의 경로를 연속적으로 변형시켜서 다른 경로와 같아진다는 것은 이들 두 경로가 호몰로그(homologous)한 관계에 있다는 뜻이지, 호모토픽(homotopic)하다는 뜻은 아니다.
 - 호몰로그 변형에서는 반대방향으로 향하는 경로들은 서로 상쇄된다. 이러한 변형을 통해 같아질 수 있는 경로들은 동일한 호몰로지 클래스에 속한다.
 - 호모토픽 변형에서는 반대방향으로나 있는 경로들이 상쇄되지 않으며, 이러한 변형을 통해 서로 같아지는 경로들은 동일한 호모토픽 클래스에 속한다.
 - 호모토픽한 곡선들은 항상 호몰로그 하지만, 호몰로그한 곡선들은 호포토픽한 관계가 아니다.
 - 호몰로그 변형에서 반대방향으로 진행되는 경로는 상쇄된다. 그래서 원래의 경로와 분리된 닫힌곡선이 생성될 수도 있다.
p218 : 복소함수 $f(z) = 1/z$에 대한 정적분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_a^b \frac{1}{z} dz = \log b - \log a$$

p219 : 복소수의 로그는 하나의 값으로 결정되지 않는다.
 - 적분 경로를 변형시켜서, a점에서 출발하여 원점을 중심으로 반시계 방향으로 한 바퀴 회전시키고 나서 원래의 지점 a로 되돌려 놓는 것이다.
 - 로그 허수부는 편각과 같다는 사실을 상기해 보자. 지금 b의 편각은 한 바퀴 돌면서 2π만큼 증가한 상태이므로, $\log b$의 값은 $2\pi i$만큼 커졌다. 따라서 원점을 중심으로 반시계방향으로 한 바퀴 돌아간 경로를 따라 a에서 b까지 적분한 값도 $2\pi i$만큼 커질 것이다.
p220 : 이는 원점을 포함하는 닫힌 경로를 따라 적분을 수행한 것이다. 닫힌 경로적분은 흔히, 다음과 같이 표기한다.

$$\oint \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

p221 : 적분경로가 양의 방향(반시계방향)으로 두 바퀴 돌아갔다면 위 적분값은 $4\pi i$가 되고, 음의 방향(시계방향)으로 한 바퀴 돌았다면 $-2\pi i$가 된다.
 - 코시공식은 원점에서 복소해석함수의 적분값을 '원점을 에워싸는 경로적분'으로 표

현한 것으로 그 형태는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z}dz=f(0)$$

p223 : 원점을 포함하는 영역에서 매끈한 복소함수는 원점에서 복소해석적이다.
p224 : 복소함수가 특정 영역 안에서 복소해석적이라는 것은 그 영역 안에 있는 임의의 점을 중심으로 해당함수를 멱급수 전개할 수 있다는 뜻이다.

8. 리만곡면과 복소사상

p233 : 원점을 중심으로 한 바퀴 돌때마다 $\log z$의 값이 $2\pi i$만큼 달라지지만, 그에 해당하는 z값도 다른 층으로 이동하기 때문이다. 정의역이 다층구조로 확장되면 로그함수가 하나의 z에 대하여 여러 값을 갖는다 해도 문제가 될 것이 전혀 없다. 이것이 바로 **리만곡면의 기본개념**이다.
p235 : 이 아름다운 개념은 현대 수리물리학, 특히 끈이론과 트위스터 이론에서 핵심적인 역할을 맡고 있다.
p237 : 리만곡면은 다양체라는 새로운 개념을 탄생시켰다. 다양체란 다양한 방식으로 휘어진 공간으로서 국소적으로는(즉, 주어진 점으로부터 아주 가까운 근방에서)일상적인 유클리드 공간의 일부분으로 간주할 수 있는 공간을 말한다.
 - 다양체는 여러 개의 조각을 이어붙인 것으로 생각할 수 있다.
 - 리만곡면에서, 각기 다른 층에 복사한 복소평면들을 이어 붙이면 다양체(즉, 리만곡면)가 형성된다.
p238 : 다양체를 이어 붙일 때에는 하나의 조각에서 다음 조각으로 넘어갈 때 어떤 국소 구조가 보존되는 지를 고려해 주어야 한다.
p239 : 코시-리만 방정식의 구체적인 형태는 아직 언급하지 않았으므로, 이 방정식에 담긴 구조의 기하학적 의미를 살펴보기로 한다.
 - 기본 개념은 공형기하학에서 출발한다. 공형기하학에서 중요한 요소는 도형의 크기가 아니라 무한소 스케일에서 바라본 형태이다.
 - 무한소 영역에서 바라본 형태는 보존된다. 예를 들어 평면 위에 그려진 아주 작은(무한소) 원에 등각사상을 가하면 크기는 달라질 수 있지만, 타원 등 다른 도형으로 변환되지는 않는다.
p240 : 복소함수 f가 복소해석적이라는 것은 사상이 등각적이고, 비반전적이라는 것과 완전히 동일하다. 비반전적(또는 향보전적)이란, 어떤 변환 하에서 형태가 보존되는 작은 구역의 방향(기울기)이 반대로 뒤집히지 않는다는 것을 의미한다.

p241 : 특정지점에서 그래프가 매끈하다면, 해당 지점을 크게 확대해 보자. 특정 지점에서 그래프가 매끈하다면, 확대를 거듭할수록 곡선이 점점 직선으로 바뀌면서 결국은 그 지점은 접선과 나란한 방향을 향하게 된다.

 - 조그마한 형태(또는 각도)가 그대로 보존되고 반전도 일어나지 않으므로 등각사상이자 비반전 사상이 되는 것이다.

p242 : 비동차 선형변환의 일반형

$$w = az + b$$

 - 이것은 유클리드 평면의 전체적인 이동과(반전은 없음) 전체적인 팽창(또는 수축)이 결합하여 나타나는 변환으로 해석할 수 있다. 실제로 이 변환은 z-평면 전체를 w-평면 전체로 사상하는 유일한 (비반전) 등각사상이다. 또한, 이 변환 하에서 (단순히 무한소 크기의 원뿐만 아니라) 모든 크기의 원은 여전히 원으로 변환되며, 직선의 곧은 형태도 그대로 유지된다.

p246 : 리만구면의 회전은 등각변환이기 때문에, 구면 전체를 다시 구면으로 투영하는 복소해석적 사상에 해당한다. 실제로 전체 리만구면을 자기 자신과 대응시키는 모든 (비반전) 등각사상은 겹선형(뫼비우스) 변환을 통해 구현될 수 있다.

 - 특별한 회전은 복소 매개변수 z 와 t를 갖는 리만구면을 이용하면 다음과 같이 나타난다.

$$t = \frac{z-1}{iz+i} \qquad z = \frac{-t+i}{t+i}$$

 - t-평면의 실수축 위쪽에 있는 부분이 z-평면에서는 반지름 1인 단위원의 내부로 들어온다.

p252 : 복소평면 상에서 스스로 겹치지 않는 닫힌 영역이 주어졌을 때, 이 영역을 단위원으로 변환시키는 복소해석적 사상이 반드시 존재한다.

p253 : 리만사상 정리는 폐곡선의 내부와 외부에 똑같이 적용될 수 있다. 따라서 복소평면 상의 폐곡선 외부를 단위원으로 사상하는 '역 리만사상 정리'가 존재하며, 폐곡선 상의 특정한 점 a가 단위원주 상의 특정한 점 a'으로 변환된다는 간단한 조건을 부과하면 이 사상은 유일하게 결정된다.

 - 에어로 포일을 지나가는 공기의 흐름같은 다양한 물리문제의 해답을 제공하기 때문이다. (단, 유체의 점성이 없고, 압축불가능하며, 회전이 없는 이상적인 경우에만 적용가능)

 - $z = -1$을 지나는 적절한 원주 상에서 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

 - 날개를 스쳐 지나가는 (이상적인)공기 흐름은 구형날개를 스쳐 지나가는 공기의 흐름으로부터 직접 구할 수 있으며, 구형 날개 주변의 흐름은 또 다른 복소해석적 변환을 통해서 알아낼 수 있다.

9. 푸리에 분해와 초함수

p258 : 오일러와 동시대에 살았던 수학자들은 과연 ‘어떠한 함수를 정직한 함수라고 생각했을까?’
 - 수학을 물리적 세계의 문제에 적용할 때, 학자들은 보통 복소해석함수나 해석함수(복소해석함수의 실함수버젼, C^{w}-함수)에서 찾아볼 수 없는 융통성을 요구하곤 한다.
p259 : 파동의 형태를 연구하는 가장 효율적인 방법은 푸리에 해석을 이용하는 것이다. 조제프 푸리에는 1768년에 태어나 1830년에 세상을 떠난 프랑스 수학자로서, 주기적으로 반복되는 진동을 사인파의 성분으로 분해하는 방법을 제시하였다.
p262 : 푸리에 급수의 표현식은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
f(x) = a_0 + a_1\cos wx + a_2\cos 2wx + a_3\cos 3wx + \ldots \\
+ b_1\sin wx + b_2\sin 2wx + b_3\sin 3wx + \ldots
\end{aligned}
$$

- e를 이용하여 sin, cos을 한데 묶으면($e^{iAx} = \cos Ax + i\sin Ax$) 아래와 같이 된다.

$$f(x) = \ldots + \alpha_{-2}e^{-2iwx} + \alpha_{-1}e^{-iwx} + \alpha_0 + \alpha_1 e^{iwx} + \alpha_2 e^{2iwx} + \ldots$$

$$F(z) = F(e^{iwx}) = f(x)$$

여기서 계수는 다음 관계를 만족한다.

$$a_n = a_n + \alpha_{-n},\quad b_n = i\alpha_n - i\alpha_{-n},\quad c = \alpha_o$$

p264 : 이식은 지수가 음수인 항을 포함하며, 이러한 급수를 로랑급수라고 한다.
 - 로랑급수를 이용하면, 푸리에 급수를 간단하게 표현할 수 있을 뿐만 아니라, 푸리에 분해를 다른 각도에서 바라볼 수 있다.
p266 : 주기함수 $f(x)$의 푸리에 분해를 $f(x) = F(z)$를 z-평면의 단위원에서 정의된 함수로 간주하고 $z = e^{ix}$의 관계를 부여하면, 푸리에 분해는 원래 함수의 (z 변수를 가지는) 로랑급수와 같아진다.
 - 양자역학으로 가면 푸리에 급수(또는 로랑 급수)가 자연의 특성과 밀접하게 연관되어 있음을 알게 될 것이다.
 - 멱급수는 수렴원 안에서 수렴하고, 그 바깥에서는 발산한다. 로랑급수에는 수렴원에 대응되는 개념으로 ‘수렴환원’이 있다. 원점을 중심으로 하는 두 원 사이의 영역에

서 주어진 급수가 수렴할 때, 이 영역을 수렴환원이라고 한다.
p274 : 푸리에 변환은 주기함수 $f(x)$를 푸리에 급수로 전개했을 때 주기 l을 무한히 길게 잡은 극단적인 예에 해당한다.

p275 : N이 ∞로 가면 주어진 p의 범위 안에서 $\sum$에 속하는 항의 개수가 무한히 많아지면서(지금 우리는 이 범위 안에서 n/N을 고려하고 있으므로 항의 개수는 N에 비례한다.) $\sum$가 적분 $\int$으로, α_r은 $g(p)dp$로 대치된다.

p276 : $N \to \infty$의 극한에서 $f(x)$는 다음과 같은 형태가 된다.

$$\sum \alpha_r z^r \ \text{->} \ \int_{-\infty}^{+\infty} g(p) e^{ixp} dp$$

- 여기서 $(2\pi)^{-1/2}$이라는 축척 인자를 적분 앞에 곱하면, $f(x)$를 $g(p)$로 나타낸 적분과 $g(p)$를 $f(x)$로 나타낸 적분 사이에 말끔한 대칭성이 나타나게 된다. (e의 지수에 붙는 부호만 달라진다.)

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(p) e^{ixp} dp, \ \ g(p) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixp} dxp$$

- 이때 함수 $f(x)$, $g(p)$를 서로 상대방에 대한 푸리에 변환이라 한다.
p281 : 19세기 초 조제프 푸리에가 네모파나 톱니파를 푸리에 변환으로 표현하였을 때, 해석적(오일러) 함수관에 익숙했던 기존의 수학자들은 불쾌감을 감추지 못했다. 기존관념으로는 함수라고 부르기조차 껄끄러운 네모파 함수가 어떻게 공식으로 표현될 수 있단 말인가?

p284 : 미분이 불가능하면서 연속이지도 않은 유별난 주기함수(이때는 C^{-1}-함수)도 푸리에 급수로 나타낼 수 있다. 또는 단위원 상에서 정의된 함수의 수렴환원이 단위원 자체로 수축되어 있다해도 이 함수는 로랑급수로 나타낼 수 있다. 이 로랑급수의 양진동수 부분과 음진동수 부분은 리만구면 위에서 각기 완벽한 복소해석함수가 되며, 이들 중 하나는 단위원의 한쪽 반 위에서 정의되고, 다른 하나는 나머지 반쪽 위에서 정의된다.
p285 : 복소평면 위에 그려진 곡선의 한 부분에서 복소해석적인 하나의 함수와 그곡선의 다른 부분에서 복소해석적인 또 하나의 함수 사이에 일어나는 비약은(이 함수들이 곡선 전체에 걸쳐 복소해석적으로 확장될 필요는 없다.) 곡선 전체에 걸쳐(복소해석적으로)정의된 새로운 함수 개념을 탄생시킨다. 이것이 1958년 일본 수학자 사토 미키

오가 처음으로 제안했던 **초함수의 정의**이다.
- 초함수를 정의하기 위해 완전한 단위원 모양의 폐곡선을 떠올릴 필요는 없다. 초함수는 폐곡선의 일부만으로도 정의할 수 있다.
p291 : 초함수는 모든 해석함수를 포함한다.

- 미분을 계속 적용할 수 있으므로 모든 C^{-n}-함수는 초함수가 된다.
- $C^{-\infty}$-함수도 초함수이다.

- 오일러 같은 수학자가 만족할 만한 해석함수, 또는 복소해석함수에서 출발하여 함수의 개념을 가능한 한 넓히려고 노력한 끝에, 가장 일반적인 초함수의 개념에 도달하였다. 그러나 초함수는 기본적으로(우리가 사용하기를 꺼렸던) 오일러식 복소해석함수로부터 간단한 형태로 정의된다.

10. 곡면

p295 : 지난 200년 사이에 수학이 이룩한 가장 위대한 업적은 과연 무엇일까? '다양한 차원의 비평탄 공간(non-flat)을 수학적으로 다루는 방법'이 개발된 것이다.
p301 : 두 개의 변수(x,y)로 이루어진 함수 f가 미분가능하려면, y를 상수로 고정하고 x하나만을 변수로 간주했을 때, f가 매끈한 (적어도 C^1이상인) 함수가 되어야 한다. 반대로 x를 상수로 고정하고 y하나만을 변수로 간주했을 때, f는 y의 매끈한 (적어도 C^1이상인) 함수가 되어야 한다. 그러나 이 조건만으로는 충분하지 않다. x와 y의 각각에 대하여 매끈하면서도 이들을 한꺼번에 고려했을 때 매끈하지 않은 함수도 있기 때문이다. $f(x,y)$가 완전히 매끈하려면 x나 y로 미분했을 때, (x,y)쌍에 대하여 연속함수가 되어야 한다.
p315 : 우리에게 필요한 것은 복소해석함수 Φ를 규정하는 방법은
- Φ가 유일하게 결정되려면, Z는 z의 복소해석함수가 되어야 하며, 그 반대로 z 도한 Z의 복소해석함수여야 한다.(복소해석함수의 복소해석함수도 복소해석함수이기 때문이다.)
- Φ가 z의 복소해석함수임을 Φ와 z의 실수부와 허수부로 나타내려면 어떻게 해야할까?
p316 : 연쇄법칙을 적용한 편미분의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

- Φ의 실수부와 허수부를 쓰면 아래와 같이 쓰면(α와 β는 실수이다.)

$$\Phi = \alpha + i\beta$$

p317 : 우리가 원했던 코시-리만 방정식이 다음과 같은 형태로 주어진다.

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial\beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\frac{\partial\beta}{\partial x}$$

- 코시-리만 방정식을 이용하면, 편미분방정식의 '존재정리'를 증명할 수 있다.

11. 다원수

p322 : 19세기 수학자들로 하여금 3차원 공간에 적용 가능한 '일반화된 복소수'를 찾아 나서게 했다.

p323 : 일반적인 형태로 결합하여 만들어진 수 $\boldsymbol{q}$를 일반 4차원 수라고 한다.

$$\boldsymbol{q} = t + u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$$

- 여기서 t,u,v,w는 실수이며, $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$는 서로 독립인 '-1의 제곱근'이다.

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$$

- 4원수는 덧셈의 교환법칙과 결합법칙을 모두 만족하며, 곱셈의 결합법칙과 덧셈-곱셈이 섞여 있는 분배법칙도 만족한다.

p324 : 4원수 체계는 서로 독립인 4개의 기저 $1,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$를 가지므로 실수에서 4차원 벡터공간을 형성한다. 다시 말해서 각 기저에 적절한 실수를 곱하여 더해주면 모든 4원수를 만들어 낼 수 있다.

p326 : 현대의 시각에서 19~20세기를 되돌아 볼 때, 그의 영웅적인 노력은 결국 실패로 끝났다고 봐야할 것 같다.

- 4차원의 이차형식 즉, $\boldsymbol{q}\overline{\boldsymbol{q}} = t^2 + u^2 + v^2 + w^2$이 상대성이론에 맞지 않는 부호로 이루어져 있기 때문이다.

p327 : 4원수는 기존의 복소수만큼 뛰어난 마술을 발휘하지 못했다.

- 4원수 체계 속에 '복소해석함수'라는 개념을 도입하기 어렵다는 것이다.

p329 : 나눗셈을 포기할 준비가 되었다면 4원수 체계는 고차원으로 쉽게 일반화 할 수 있으며, 이는 현대물리학과 정말로 밀접한 연관이 있다. 바로 클리포드 대수의 개

념이다.
 - 그라스만 대수도 현대 이론물리학에서 중요한 일익을 담당하고 있다.
p331 : 스피너란, 간단히 말해서 한바퀴(2π) 돌아갔을 때, 부호가 바뀌는 양을 의미한다.
p332 : 어떤 물체이건 간에, 한바퀴 돌아서 원래 위치로 되돌아오면 달라지는 것이 전혀 없다.
p334 : 3차원 공간에서는 다양한 축을 중심으로 여러 회전을 연속적으로 가하여 얻어진 최종결과를 특정 축을 중심으로 이루어진 단 한 번의 회전으로 표현할 수 있다. 이것은 3차원 비반전 회전의 특징이다.
p340 : 클리포드 대수의 일반적 요소는 각 차수의 선형결합으로 표현된다.
 - 클리포드 대수가 중요하게 취급되는 이유 중 하나는 스피너를 정의할 때 필요하기 때문이다.
p342 : 그라스만 대수는 클리포드 대수보다 ‘더 작은 국소 구조’에만 의존하기 때문에, 더욱 근본적이고 범용적인 대수체계이다. 기본적으로 클리포드 대수에서는 ‘수직’의 의미를 알아야 반전으로부터 일상적인 회전을 만들어낼 수 있지만, 그라스만 대수에서는 회전이라는 개념자체가 필요 없다.

12. n차원 다양체

p350 : n차원 다양체는 현대 기초물리학의 거의 모든 분야에 공통으로 적용되는 개념이다. n은 양의 정수이며, $n=0$도 허용된다.
 - 3차원 유클리드 공간에서 일상적인 강체의 배위공간(configuration space, 보통 공간 c로 표기하며, 이곳에서 서로 다른 지점은 강체 내부의 서로 다른 위치를 의미한다.)은 비유클리드 6차원 다양체이다. 중력 중심의 위치가 3개의 차원을 갖고(즉, 자유도 3), 강체가 회전할 수 있는 독립적인 축이 3개이기 때문이다.
p351 : 강체의 회전과 관련된 3차원 배위공간을 R이라 하자. 그러면 R의 각 점은 강체의 특정한 회전배향을 나타낸다.
p354 : 3차원 다양체 R(또는 6차원 다양체 c)은 다중연결되어 있으며, 단일연결된 3차원(혹은 6차원)유클리드 공간과는 다른 위상을 갖는다.
p355 : n-다양체 M(n차원 다양체)을 수학적으로 다루는 방법을 알아보자.
 - 여러 개의 좌표조각을 붙여 만들 수 있다.
p357 : 하우스도르프 공간이란, 서로 다른 임의의 두 점이 주어질 때, 이들을 각각 포함하면서 서로 교차하지 않는 열린 집합이 존재하는 공간을 말한다.
p358 : 다양체 M(n차원 다양체)위에서 매끈한 함수 Φ를 정의할 수 있다.

 - 다양체 M(n차원 다양체)위에서 벡터장 $\boldsymbol{\xi}$를 정의할 수 있다.
p359 : 대수적인 방법으로 1-형식(코벡터장 이라고도 한다.)을 정의할 수 있다. 코벡터장 $\boldsymbol{\alpha}$는 벡터장에서 스칼라 장으로 가는 일종의 사상(map)으로 생각할 수 있다.
 - 코벡터는 벡터의 쌍대객체로 정의되는데, 벡터와 코벡터는 서로 대칭관계이기 때문이다.
p361 : 벡터와 코벡터의 기하학적 차이점은 무엇일까?
p366 : $(n-p)$차원 평면요소(혹은 $(n-p)$차원장)를 '단순 p-형식'이라고 한다.
 - p-벡터에서와 마찬가지로 가장 일반적인 p-형식은 코벡터의 쐐기곱으로 표현할 수 없지만, 여러 항들의 합으로 표현할 수 있다.
p368 : 공간차원이 달라지면 적분을 수행할 때 약간의 주의를 기울일 필요가 있다.(예를 들어, 단위면적당 질량은 단위부피당 질량과 전혀 다른 뜻이며, 단위도 다르다.)
 - 외미적분학은 프랑스의 수학자 엘리 카르탕(1869~1951)이 처음으로 도입했다.
p369 : 카르탕의 체계에서 dx는 무한소가 아니라 곡선적분의 대상인 밀도(1-형식)와 연관되어 있다.

$$\int \boldsymbol{\alpha} = \int_R \boldsymbol{\alpha}$$

여기서 R은 적분이 수행되는 곡선 γ의 일부이다.
p370 : 2차원 이상의 고차원에서도 이에 대응되는 규칙이 있을까?
 - 카르탕이 창시했던 미분형식의 외미적분에 모두 들어 있다. 이것을 '외미적분의 기본정리'라고 부른다.
p373 : 외미적분의 기본정리는 p-형식 $\boldsymbol{\phi}$에 대해 다음 식을 통해 가장 우아한(그리고 강력한)형태로 표현될 수 있다.

$$\int_R d\boldsymbol{\alpha} = \int_{\partial R} \boldsymbol{\phi}$$

p377 : 외적분의 기본정리에서 R을 선분으로 잡으면 미적분의 기본정리의 1차원의 버전이 자연스럽게 유도된다.
p378 : n-다양체 M의 부피요소를 이용하여 $(n-p)$-벡터를 p-형식으로 바꾸는 것은 텐서 대수를 통해서 이루어진다.
p386 : 리만곡면을 1차원으로 간주한다는 것은 복소수에 적용되는 복소해석적 연산만을 다룬다는 뜻이다.
p387 : 복소 n-다양체는 n차원 공간이 아니라 실수로 이루어진 $2n$차원의 다양체가 된다.(물론 복소구조라는 특이한 국소구조를 가진 $2n$차원 다양체이다.)

13. 대칭군

p422 :

노르웨이 수학자 소푸스 리(Sophus Lie)는 연속군에 적용되는 아름다운 이론을 창시하였다(그의 이름을 따서 '리군'이라고 부른다). 이 이론은 군 원소의 무한소와 밀접하게 관련되어 있다. 무한소 원소로부터 '리대수'라고 하는 하나의 대수체계가 정의되며, 군의 국소적 성질에 관한 모든 정보는 리대수 안에 들어있다.

p450 :

지금까지 직교군과 유니터리군에 대하여 알아보았다. 이들은 예외군이 아닌 고전군 즉 단순 리군의 사례들이다. 여기에 심플레틱군을 추가하면 고전군의 목록이 완성된다.

p393 : 물리계에 실존하는 물체들은 플라톤의 이상적 도형을 어설프게 흉내 낸 것에 불과하기 때문에 완벽한 대칭성을 가지고 있지 않다.

- 중력을 포함한 모든 물리적 상호작용은 근본적인 단계에서 '완벽하게 대칭인' 물리적 구조에 전적으로 의존한다.
- 물리적 상호작용을 대칭개념으로 설명한다는 아이디어는 게이지 접속에 함축되어 있다.

p394 : 대칭군은 수학뿐만 아니라 물리학, 화학, 결정학 등의 분야에서 매우 중요하게 취급되고 있다.

- 가장 간단한 사례부터 생각해보자. 정사각형은 어떤 대칭성을 갖는가? 정사각형의 반전을 허용하느냐에 따라서 답은 두 가지이다.
- 반전을 허용하지 않는 경우, 정사각형은 그것을 포함하는 평면위에서 90^0의 정수배만큼 회전시켜도 원래의 모양이 변하지 않는다.
- 반전변환을 허용하지 않는 경우, 정사각형의 대칭변환은 복소평면 C에서 $1=i^0$, $i=i^1$, $-1=i^2$, $-i=i^3$를 곱하는 연산이며, 반전을 허용하는 경우, 정사각형 대칭변환에는 $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}\,i$, $-\mathbf{C}$, $-\mathbf{C}\,i$가 추가된다.

p396 : 반전방향을 허용하는 경우, 실수축을 중심으로 정사각형을 뒤집는 변환 $\mathbf{C}$로 표기하자. $\mathbf{C}$는 $x+iy$를 $x-iy$로 변환시키는 복소켤레 연산자이다.

p398 : 군이론에서 중요하게 취급되는 개념 중 하나로 부분군이 있다. 주어진 군의 원소들 중 일부를 취했을 때, 이들이 원래의 군과 동일한 곱셉법칙와 역연산을 만족한다면 이들만으로 하나의 군이 형성된다. 이렇게 만들어진 군을 부분군이라 한다.

p399 : 입자들뿐만 아니라 입자들 사이에서 일어나는 상호작용도 특정한 대칭성으로

연결되어 있다. 그러나 대부분 전체 대칭군이 확연하게 드러나지 않고, 대칭 일부가 부분군으로 붕괴되어 나타난다. 그러므로 원래 대칭군으로부터 어떤 부분군이 가능한지를 분석하는 것은 입자물리학의 체계를 세우는데 매우 중요한 작업이라고 할 수 있다.

- 주어진 군에서 취한 임의의 원소가 특정부분군과 가환일 때(즉, 특정부분군의 모든 원소와 교환법칙이 성립할 때) 이 부분군을 정규부분군이라 한다.

p400 : 정사각형 대칭군의 부분군 중에는 정규부분군이 아닌 것도 있다. 이것을 비정규부분군이라 한다.

p402 : 자명하지 않은 정규부분군을 갖지 않는 군을 단순군이라 하는데, 단순군은 군론의 기본을 이루는 개념으로 특히, 유한단순군과 연속단순군은 19~20세기에 중요한 진전을 이루었다. 연속군(즉, 리군)은 독일의 수학자 빌헬름 킬링(1847-1923)에 의해 비약적인 발전을 이루었으며, 1984년 프랑스의 위대한 기하학자이자 대수학자였던 엘리 카르탕에 의해 비로소 완성되었다.

p403 : 단순군의 분류는 군 전체의 분류법에 중요한 실마리를 제고한다. 일반적인 군은 단순군(그리고 가환군)으로부터 만들어질 수 있기 때문이다.

p404 : 일반적인 군이론에서는 벡터공간의 특정 대칭군들이 핵심적인 역할을 한다. 벡터공간의 대칭은 벡터공간의 구조가 보존되는 선형변환으로 표현될 수 있다.

p405 : 하나의 벡터공간을 다른 벡터공간으로 변형시키는 변환을 선형변환으로 간주한다.

- 선형변환은 행렬이라는 숫자배열을 이용해서 말끔하게 표현할 수 있다.
- 이 절에서는 행렬이 만족하는 우아한 대수법칙에 대하여 알아본다.
- 13.3 ~ 13.7절에서는 행렬의 기본이론과 연속군 이론에의 응용을 주로 다룬다. 이 내용은 양자이론을 이해하는데 반드시 필요한 것들이다.

p416 : 선형변환과 관련된 여러 개념 중에서 가장 중요한 것은 단연 '고유값'과 '고유벡터'이다.

- 선형변환 T가 자신의 고유벡터 v에 적용되면, 상수가 곱해진 v, 즉 자기 자신으로 변환된다.(물론, v는 0이 아니다). 이때 v앞에 곱해진 상수 λ를 고유값이라 한다.

$$Tv = \lambda v$$

- 위의 방정식은 $(T - \lambda I)v = 0$으로 쓸 수도 있다.

- λ가 T의 고유값일 때 $T - \lambda I$는 특이행렬이며, 역으로 $T - \lambda I$가 특이행렬이면 λ는 T의 고유값이다.

p420 : 군의 곱셈을 실제 복소수의 곱셈으로 표현할 수 있다. 그러나 복소수 곱셈은 가환이기 때문에(즉, 교환법칙을 만족하기 때문에) 비가환군에는 이런 식의 표현법을

사용할 수 없다. 반면에, 선형변환(또는 행렬)은 교환법칙이 성립하지 않으므로 비가환군을 표현하는데 사용할 수 있다.
p421 : 양자역학에 등장하는 변환은 거의 다 선형변환이다.
- 양자역학에는 무한차원 공간의 선형변환이 자주 등장한다.
p422 : 노르웨이 수학자 소푸스 리(Sophus Lie)는 연속군에 적용되는 아름다운 이론을 창시하였다(그의 이름을 따서 '리군'이라고 부른다)
- 이 이론은 군 원소의 무한소와 밀접하게 관련되어 있다. 무한소 원소로부터 '리대수'라고 하는 하나의 대수체계가 정의되며, 군의 국소적 성질에 관한 모든 정보는 리대수 안에 들어있다.
p416 : 리대수는 +, - 와 괄호연산 [,] 으로 이루어져 있으며, 여기서 실수나 복소수 곱이 허용된다.
p450 : 지금까지 직교군과 유니터리군에 대하여 알아보았다. 이들은 예외군이 아닌 고전군 즉 단순 리군의 사례들이다. 여기에 심플레틱군을 추가하면 고전군의 목록이 완성된다.
p455 : 현대물리학이 말하는 모든 물리적 상호작용들은 '게이지 접속'에 지배되고 있으며, 이것은 정확한 대칭을 갖는 공간의 특성에 전적으로 좌우된다.

14. 다양체 위에서의 미적분

p461 : 벡터공간에 작용하는 대칭군을 벡터공간의 선형변환으로 표현할 수 있음을 확인하였다. 특별한 군의 경우에는 벡터공간이 선형변환 하에서 변하지 않는 특별한 구조를 갖고 있는 것으로 생각할 수 있다.
- 유클리드 기하학은 벡터공간에서 펼친 이론이 아니었다.
- 유클리드 공간은 아핀공간의 한 사례이다. 아핀공간은 한마디로 말해 원점이 없는 벡터공간이다.
p463 : 다양한 군구조와 텐서들은 다양체 위의 각 점에서 국소적으로 연관되어 있다.
- 아인슈타인의 휘어진 시공간이 각 접공간에서 로렌츠 (유사)계량으로 주어지는 국소 구조를 가지는데 반해 고전역학의 위상공간은 국소 심플레틱 구조를 가진다.
- 이런 공간에서 미적분을 어떻게 수행해야 하는가?
- 미분이라는 것이 좌표에 따라 달라진다. 하나의 좌표조작에서 다른 좌표조각으로 옮겨가면, 기존의 미분값을 더는 적용할 수 없게 된다.
p464 : 미분이 일반적으로 적용되려면, 특정 좌표계와 무관해야 한다.
- 다양체에서 벡터장의 불변성을 논하려면 평행성이라는 개념이 먼저 확립되어야 한다. 그런데 다양체 위에서는 일반적으로 유클리드의 제5공준이 성립되지 않는다.
p466 : 경로와 무관한 평행성의 개념은 현대입자물리학 이론과 아인슈타인의 일반상

대성 이론에서 커다란 성공을 거두었다.
p469 : 평행이동을 이용하여 벡터장(일반적으로는 텐서장)의 미분을 정의할 수 있을까? 기본 아이디어는 p점에서 특정방향으로 특정거리만큼 떨어진 q에서의 벡터장과 동일한 벡터장을 p점에서 취하고 q로 평행이동 시킨 결과를 비교하는 것이다. 가장 좋은 방법은 전자에서 후자를 빼는 것이다.
 - 이런 방식으로 정의된 미분은 공변미분연산자 또는 접속이라고 한다.
p476 : 곡률은 (적어도 국소적인 척도에서) 접속이 경로에 따라 달라진다는 사실을 말해주는 기본적인 양이다. 평행이동의 개념을 이용하여 벡터가 공간속의 작은 폐곡선을 돌아오는 모습을 상상할 때, $\boldsymbol{R}$은 벡터가 출발점으로 되돌아 왔을 때 달라지는 정도를 나타내는 양이다. 이런 식으로 $\boldsymbol{R}$을 가시화할 때는 경로를 무한히 작은 평행사변형으로 잡는 편이 가장 쉽다.
 - 평행사변형을 만들려면 ∇로부터 정의되는 측지선부터 알아야 한다. 측지선은 유클리드 기하학에 등장하는 직선과 비슷하다. 측지선은 두 점을 연결하는 가장 짧은 선이다. (곡면 위에 접촉한 채로 팽팽하게 당겨진 끈을 생각하면 된다). 아인슈타인의 일반상대성이론에서 자유낙하하는 물체가 시공간에 그리는 궤적도 바로 측지선이다.
p503 : 심플렉틱 다양체의 국소적 구조는 플로피 구조라 부르는 특수한 구조의 한 사례이다. 심플렉틱 다양체에는 곡률이라는 개념이 없는데, 이것은 국소적 영역에서 심플렉틱 다양체와 다른 다양체를 구별하는 수단이기도 하다.

15. 파이버번들과 게이지 접속

p507 : 현대 입자물리학의 상당부분은 접속(또는 공변미분)에 의존하고 있다. 이것을 일반화한 개념이 바로 ‘게이지 접속’이다. 공변미분 개념은 기본적으로 다양체 위의 곡선을 따라 이루어지는 벡터의 평행이동에 기초를 둔다.
 - 벡터와 텐서는 다양체위의 한 점에 접하는 접공간에서 정의되는 양이다. 그러나 게이지 접속은 접공간이 아닌 공간에서 일어나는 어떤 물리량의 평행이동과 관련되어 있다.
p508 : 입자 간의 상호작용(중력은 제외)을 설명하는 게이지 이론에 필요한 공간은 일상적인 공간과 시간에 새로운 ‘공간차원’이 추가된 공간이다. 이 여분의 차원을 흔히 ‘내부차원’이라고 한다. 내부차원을 따라 움직인다고 해도, 우리가 알고 있는 시공간 상에서는 아무런 움직임도 나타나지 않는다.
 - 번들(다발)의 개념을 도입하여야 한다.
 - 여분의 공간차원들은 기존의 시간 및 공간차원과 모든 면에서 동일한 자격을 갖는다.
p509 : 시공간의 차원을 4에서 5로 늘렸더니, ‘시공간의 기하학적 서술’에 맥스웰의

전자기방정식이 자연스럽게 추가되었다.
- 우리가 살고 있는 우주는 원래 5차원이지만, 그중 하나의 차원이 작은 영역 속에 감겨있기 때문에 4차원 시공간만 느낄 수 있다.
- 숨어 있는 차원을 끄집어낸다는 것은 확실히 매력적이고 기발한 아이디어이다.
p510 : 여분의 차원은 현실세계에 존재하는 차원과 결코 동등할 수 없기에 칼루자-클라인 식의 논리를 그대로 적용하기는 곤란하다.
p511 : 시공간의 각 점 위에 파이버(섬유형태의 조직을 총칭)라 불리는 무언가가 다른 공간을 형성하고 있다고 상상해 보자. 파이버는 위에서 언급한 물리적 얼개에 의거하여 가능한 모든 내부차원으로 이루어져 있다. 그러나 '번들'이라는 개념은 이보다 훨씬 광범위한 의미를 가지기 때문에 앞으로 당분간은 이 용어에 특별한 물리적 해석을 내리지 않은 채로 사용할 것이다.
p519 : 지금부터는 더 집중해서 읽어주기 바란다.
- 번들 다양체의 위상학적 구조를 최초로 규명한 사람은 하인즈 호프(1931)였다. 이렇게 번들을 확장하는 과정을 '**호프 파이버화**'라고 한다.
- 호프가 제안했던 과정은 윌리엄 클리포드가 1873년 제안한 기하학적 구조인 '클리포드 평행선(11장 참조)'을 기반으로 진행하기 때문에 클리퍼드 번들 혹은 '클리포드-호프 번들'이라 부르기로 하겠다.
p520 : 클리포드-호프 번들을 머릿속에 그리는 가장 분명한 방법은 복소수쌍(w,z)로 이루어진 C^2공간을 떠올리는 것이다(여기서는 C^2이 2차원 복소공간이라는 사실만 기억하면 된다. 12.9절 참조).
p529 : 일반적인 벡터공간과 관련된 또 하나의 중요한 개념으로 사영공간이 있다. 벡터공간은 그 자체로 거의 사영공간의 번들이라고 할 수 있다. 벡터공간이 원점을 제거하면 사영공간의 번들을 얻으며, 원점이 제거된 선번들도 함께 얻어진다.
- 풍경화를 그릴 때, 수평선을 향해 멀어져 가는 두 줄의 평행선을 그려보면, 두 줄 사이의 간격이 점차 가까워지다가 수평면 위의 '소실점'에서 만나는 것을 볼 수 있다. 사영기하학에서 소실점은 무한원점과 함께 매우 중요하게 취급하는 개념이다. 유클리드 평면에 그려진 한 쌍의 평행선은 어디서도 만나지 않지만, 무한원점에서는 만날 수 있다.
p535 : 번들의 기하학과 위상은 원래 복잡하기 때문에, 혼란스럽다고 해서 낙담할 필요는 없다.
p544 : 번들을 구축할 때 나타나는 대칭과 파이버가 갖는 대칭이 일치하지 않을 수도 있다
p546 : 번들의 접속의 개념은 물리력을 다루는 현대 이론에서 '게이지 접속'이 되어 실로 핵심적인 역할을 하며, 몇몇 물리장은 이 접속의 곡률이란 형태로 그 모습을 드러낸다(맥스웰의 전자기 이론이 전형적인 사례이다). 이로써 우리는 정확한 대칭성을

갖는 파이버가 물리학에서 얼마나 중요한 개념인지를 알게 되었다. 이제 대칭의 근원과 속성을 규명하는 일만 남았다.

16. 무한대로 가는 사다리

p550 : 물리적 우주의 작용방식은 근본적으로 ‘무한대’에 의존하며, 그 저변에는 무한대의 수학이 자리잡고 있다.
p551 : 정수는 물론이고 유리수와 무리수도 극대, 극미의 영역에서는 한계가 없다. 이런 상황에서 ‘유한한 수체계’를 어떻게 이해해야 하는가?
 - 모듈로 p의 정의는 다음과 같다. 두 개의 정수 a, b가 p배 정수배만큼 차이가 날 때, a와 b는 모듈로 p와 같다.

$$a - b = kp \quad k\text{는 정수}$$

일 때, $a \equiv b$
 - 이 규약에 의하면 모든 정수는 p개의 동치류로 분류된다.

p552 : 무한집합을 도입하면 체계적인 설명이 가능하기 때문에 편의상 사용하는 것뿐이다. 어떠한 경우에도 유한집합을 대상으로 하는 연산만을 나열하여 모든 문제를 해결할 수 있다.
p554 : 지나칠 정도로 많은 소수에 의존하는 물리학이론들은 ‘무한대’라는 단 하나의 개념에 기초한 이론보다 훨씬 복잡하고 현실성도 없다.
p557 : 유한기하학 및 유한대수학은 수학적으로 매우 우아한 구조를 갖지만, 물리적 세계와 어떤 관계에 있는지 분명하지 않다.
 - 물리법칙과 직접 관련되어 있는 수학은 플라톤이 말한 이상적 수학 세계의 극히 일부에 불과하기 때문이다.
p558 : 매력적인 유한 구조에서, 무한에 내재한 놀라운 수학적 다양성으로 우리의 관심을 돌려보자.
p559 : 연속적인 물리량을 수학으로 표현할 때에는 무한대 개념이 반드시 필요하다.
 - 데데킨트 절단을 설명할 때 언급한 바와 같이 실수체계는 유리수의 무한집합을 이용하여 구축될 수 있지만, 사실 실수의 집합은 유리수보다 훨씬 큰 무한대로 이루어져 있다.
 - 게오르그 칸토어는 1974년 “무한대에는 여러 종류가 있다”는 놀라운 사실을 증명했고, 그의 이론은 1895년까지 꾸준하게 개발되었다.
p560 : 칸토어가 불러일으킨 수학혁명은 ‘1대1 대응’이라는 개념에서 시작된다. 두 집합의 원소들을 1대1로 짝짓는 경우, 짝을 이루지 못하고 남는 원소가 하나도 없을 때,

두 집합은 “동일한 카디넬리티(cardinality)를 갖는다”고 말한다. 일상적인 언어로 말하자면, 원소의 수가 같다는 뜻이다.
 - 무한집합은 놀랍게도 자기 자신의 ‘적절한(전체집합과는 다르다는 뜻이다)’ 부분집합과 카디넬리티가 같을 수 있다.

 - 자연수 집합을 대상으로 확인해 보자

$$N = \{0,1,2,3,4,5,...\}$$

 - 이 집합에서 0을 제거하여 얻어진 새로운 집합 $N-0$은 원래의 집합 N과 카디넬리티가 같다. 왜냐하면 집합 N에 속하는 임의의 원소 r은 집합 $N-0$에 속하는 $r+1$과 1대1대응될 수 있기 때문이다.

p564 : 칸토어의 표기법을 따라 자연수 N의 카디넬리티를 $\aleph_0$(알레프-넛 또는 알레프-널)이라 하자. 방금 말한대로 이 값은 정수 Z의 카디넬리티와 같다. 사실, 무한수 $\aleph_0$는 무한기수 중에서 제일 작은 것이다. 그렇다면, 유리수의 카디넬리티 ρ는 얼마인가?
p565 ; $\rho = \aleph_0$라는 결론이 자연스럽게 도출된다.
 - 칸토어는 $\aleph_0$보다 큰 무한대가 존재한다는 사실을 증명했다. 실수 R의 카디넬리티가 그 대표적인 사례이다.
p567 : 2^α는 원소의 수가 α인 집합이 가지는 부분집합의 개수이다.
p568 : 칸토어의 증명을 이용하면 실수의 개수가 자연수의 개수보다 많다는 사실을 알 수 있으며, 이와 더불어 수의 크기에는 한계가 없다는 사실을 확인할 수 있다.
 - 칸토어의 증명 즉, ‘실수의 개수는 자연수보다 많다’는 증명과 어떤 식으로 연결이 되는지 알아보자.
 - 실수의 카디넬리티 C가 $2_0^{\aleph}$와 같다는 것을 증명할 수 있으면 우리 의문은 자연스럽게 해결된다.

$$C = 2_0^{\aleph}$$

 - 그러면 $C > \aleph_0$이 증명된다.
p570 : 연속체(예를 들자면 실수 R 같은)의 카디넬리티 $2_0^{\aleph}$ 는 종종 C로 표기한다. 칸토어는 이것을 ‘$\aleph_0$ 다음으로 작은 기수’라는 의미에서 $\aleph_1$로 표기했으나, $\aleph_1 = 2_0^{\aleph}$을 증명하지는 못했다.
 - 쿠르트 괴델과 폴 코헨은 “표준집합론으로는 연속체가설(그리고 선택공리)을 증명할 수 없다”는 사실을 증명하였다.

p571 : 괴델의 불완전성 정리 때문에, 연속체가설의 진위는 아직 해결된 것으로 볼 수 없다.
 - 가장 큰 기수가 존재한다고 믿었던 철학자 버트런드 러셀은 칸토어의 결론에 회의적인 생각을 품었다가 자세한 내용을 연구한 후, 1902년 생각을 바꾸기도 했다. 그는 칸토어의 논리를 '모든 집합으로 이루어진 집합'에 적용하여 그 유명한 '러셀의 역설'에 도달하였다.
 - 자기 자신의 원소가 아닌 모든 집합들로 이루어진 집합을 R이라고 하자. 그렇다면, R도 자기 자신의 원소인가?
 - 그러면 R은 '자기 자신의 원소가 아닌 집합' 중의 하나가 되어야 하는데, 이것은 방금 세운 가정에 위배된다.
 - 이번에는 R이 자기 자신의 원소가 아니라고 가정해보자. 그러면 R은 '자기 자신을 원소로 갖지 않는 집합'의 원소가 될 자격이 분명히 있다. 다시 말해서 자기 자신에 속해야 한다. 그런데 방금 전에 R은 자기 자신의 원소가 아니라고 가정했으므로, 이 경우에도 모순을 초래한다.
p572 : 러셀이 그 유명한 역설에 이른 것도 칸토어의 증명을 통해서였다.
 - 수학자들은 이 역설을 해결하기 위해 집합과 모임을 구별하기도 했다. (집합은 성질이 비슷한 객체들을 모아 놓은 집단이 반면, 모임은 공통점이 없는 객체들을 중구난방으로 모아 놓은 집단이라고 생각하면 된다. 집합을 모아 놓은 집단은 그 구성성분이 무엇이건 간에 모임으로 간주해야 한다는 것이다.
 - 집합의 집합은 허용되지 않고(모임의 모임도 허용되지 않는다) 집합의 모임이라는 개념만 허용된다.
 - 그런데 이 논리에는 다소 불만스러운 구석이 있다.
p574 : 수학에서 무언가를 '구성한다'라는 말이 무슨 뜻인가?
 - 어떤 부분집합이 '구성적으로' 정의될 수 있을까
 - 1936년 앨런 튜링이 그 기초를 확실히 다졌다. '계산가능성'이라는 개념이다.
 - 계산이란 이상적인 컴퓨터가 수행하는 일련의 작업을 말한다.
 - '이상적'이라는 말은 계산이 아무리 오랫동안 진행되어도 오류를 범하지 않고, 자료의 저장공간에도 한계가 없다는 뜻이다.
p575 : 완전제곱수 4개의 합으로 표현되지 않는 자연수를 찾는 계산이 무한정 돌아가게 된다.
 - "모든 자연수는 완전제곱수 4개의 합으로 표현된다"는 사실이 18세기의 위대한 이탈리아계 프랑스 수학자 조제프 라그랑주에 의해 이미 증명되었기 때문이다.
p578 : 괴델은 수학자들이 사용하는 증명법 자체를 문제 삼았다.
 - 집합론에 과도한 자유를 부여함으로써 야기된 연설들(러셀의 역설 등)을 피해가기 위해 '형식체계'라는 새로운 개념을 도입하였다. 이것은 수학적 논리 속에서 '수학적

증명'에 해당하는 부분을 분명하게 규정하는 일종의 가이드라인 이었다. 그러나 괴델은 엄밀한 논리를 통해 수학적 형식체계가 제대로 작동할 수 없음을 증명했다.
p579 : "우리가 수학적 증명에 어떤 규칙을 부여했던 간에 일단 그 규칙을 신뢰한다면, (규칙이 잘못되었음을 증명할 수 없다면) 그 규칙만으로는 이를 수 없는 어떤 수학적 진리에 도달할 수 있다"는 점을 시사한다.
- 괴델의 정리는 튜링의 정리로부터 직접 유도할 수 있다. (처음에 알려졌을 무렵에는 서로 다른 정리로 취급되었다).
- 잘 알려진 수학명제는 "이러저러한 튜링머신의 작용이 끝나지 않는 (무한히 계속되는)"형태로 표현할 수 있다.

- 모든 자연수는 완전제곱수 4개의 합의 표현된다. - **라그랑주 정리** -
- 20세기 말에 앤드루 와일즈가 증명한 **페르마의 마지막 정리**
- "2보다 큰 모든 짝수는 소수 두개의 합으로 표현된다. - **골드바흐의 추측** -

p581 : 물리학에서 실수체계 R의 카디넬리티 $C(=2^{\aleph}_0)$ 이상을 고려하는 경우가 전혀 없다는 사실이다.
p582 : 양자역학이 힐베르트 공간이라는 무한차원공간에서 전개된다는 사실을 알게 될 것이다.
- 개수를 늘일 수 있는 가장 그럴듯한 후보는 시공간에서 불규칙한 곡선(또는 물리적 장배열)들로 이루어진 공단을 고려하는 양자장이론의 경로적분이다.
- 카디넬리티의 개념은 물리적 공간의 크기를 가늠할 수 있을 만큼 확고하게 정립되지 않았다.

17. 시공간

p587 : 1장부터 16장까지는 수학의 이야기로 일관해 왔다. 이론과 실험을 통해 알려진 물리적 세계의 특성에 대해 알아볼 것이다. 제일 먼저, 모든 물리현상이 발생하고 진행되는 배경, 즉 '시공간'부터 시작해보자.
p589 : 만일 시간에 '원점'이 존재한다면, 물체가 이 점을 통과하는 순간에 역학법칙이 달라질 수도 있다. 그러나 원점이 없으면 역학법칙은 모든 시간에 걸쳐 동일한 형태로 적용되어야 한다.
- 물리적 공간도 시간과 마찬가지로 원점이 없는 것으로 간주할 것이다. 즉, 공간은 모든 방향으로 끝없이 펼쳐져 있으며, 역학법칙은 모든 곳에서 동일하게 적용된다.
- 3차원 공간에서 거리라고 하면, 보통 일상적인 유클리드 거리(미터단위로 측정되는 양)를 의미하고, (시간이라는) 1차원 공간에서 거리는 초나 분단위로 측정되는 시간간

격을 의미한다.
 - 아리스토텔레스의 물리학에는(갈릴레오와 뉴턴의 물리학도 마찬가지지만) ‘시간의 동시성’이라는 절대개념이 존재한다.
 - 어떤 사건이 동시에 일어난 사건이다. 라는 말은 절대적인 의미를 지닌다. (즉, 동시성을 판별할 만한 절대적인 시간 기준이 존재한다는 뜻이다).
p590 : 우리는 두 사건이 공간의 같은 장소에서 일어났는지 또는 같은 시간에 일어났는지 판별할 수 있다(발생장소가 같다면 시간이 다를 것이고, 발생시간이 같다면 장소가 다를 것이다).
p591 : 두 개의 사건이 같은 장소에서 일어났는지(공간 간격이 0), 또는 동일한 시간에 일어났는지(시간 간격이 0)여부를 분명하게 판단할 수 있다.
 - 1638년 갈릴레오가 구축했던 역학체계에는 어떤 개념의 시공간이 도입되었는가?
p592 : 균일하게 움직이는 좌표계에는 역학법칙들이 모두 동일하다.
 - 완전하게 정지한 상태와 균일한 속도로 움직이는 상태를 물리적으로 구별하는 방법은 이 세상에(이 우주에)존재하지 않는다.
 - 시간이 흘러도 전혀 움직이지 않는 배경공간(스크린)같은 것은 이 세상에 존재하지 않는다.
p593 : 1분이 지나고 나서 공간상의 한 점이 지금 내가 선정해 놓은 점과 동일하다고 주장하는 것은 아무런 의미가 없다.
 - 물리적 공간이 매 순간 완전히 사라지고, 그때마다 새로운 공간이 등장한다는 것은 실로 놀라운 해석이 아닐 수 없다.
p594 : 고전역학의 법칙을 완성했던 뉴턴은 ‘절대공간’ 개념에 깊이 빠져 있었다.
p595 : 처음에 뉴턴은 다섯 개(혹은 여섯 개)의 법칙을 제안했는데, 그중 네 번째가 바로 갈릴레오의 상대성 원리였다. 그러나 프린키피아를 출판할 무렵에는 운동법칙을 세 개로 축약하여 발표하였다. 이것이 바로 우리가 알고 있는 ‘뉴턴의 운동법칙’이다. 뉴턴은 이 세 법칙으로부터 다른 모든 결과를 유도 가능함을 간파하고 있었다.
 - 절대공간은 뉴턴의 법칙이 적용되는 ‘물리적 배경’이었던 셈이다.
 - **뉴턴의 제1법칙** : 힘이 작용하지 않는 한 입자는 등속운동을 하는데 이것을 ‘관성운동’이라고 한다.
p596 : 균일한 직선운동(관성운동)은 시공간에서 ‘직선’으로 해석된다.
 - **뉴턴의 제2법칙** : 입자의 가속도는 입자에 가해지는 힘을 입자의 질량으로 나눈 값과 같다.
 - 표준 뉴턴역학에서 입자에 가해지는 총 힘은 다른 모든 입자가 이 입자에 가하는 힘들의 벡터합으로 주어진다.
p599 : 뉴턴의 이론은 엄청난 위력을 발휘하면서 근 250년 동안 물리학의 권좌를 지켜왔지만, 지금 그의 이론이 완벽하지 않다는 사실을 알고 있다. 그뿐만 아니라, 뉴턴

의 이론을 보완하려면 중력의 본성을 다루는 아인슈타인의 심오하고 혁명적인 사고방식을 따라야 한다는 것도 알고 있다.

- 아인슈타인의 심오하고 혁명적인 관점이란 대체 무엇인가?
- 중력과 가속운동이 근본적으로 같은 현상임을 말해주는 '등가원리'였다.

p600 : 중력장을 통해 물체에 가해지는 중력의 세기는 중력법칙에 등장하는 물체의 질량에 비례하며, 물체에 작용하는 저항은 뉴턴의 제2법칙에 등장하는 물체의 질량과 관련되어 있다. 전자를 '중력질량'이라 하고, 후자를 '관성질량'이라고 하는데, 이들을 별개의 질량으로 분리해서 생각하는 것이 여러모로 유리하다(중력질량은 다시 세분하면, 수동적 중력질량과 능동적 중력질량으로 나눌 수 있다).
p601 : **뉴턴 제3법칙** : 작용-반작용법칙에 의하면 수동적 질량과 능동적 질량은 정확하게 같다.
- 갈릴레오의 예측은 중력질량과 관성질량이 같다는 사실에 (또는 적어도 비례한다는 사실)에 근거하고 있다.
- 중력장과 전기장의 다른 결과를 주는 근본적인 이유는 입자의 전하와 관성질량이 전혀 무관하기 때문이다.
p602 : 질량이 다른 두 물체는 동일한 비율로 낙하한다는 주장은 오직 중력에만 적용될 수 있다.
- 중력의 이러한 특성을 '**등가원리**'라고 부르는 이유는 무엇인가? 여기서 '등가'라는 말은 균일한 중력장이 가속도와 물리적으로 동등하다는 것을 의미한다.
p603 : 가속도가 (등가원리에 의해)중력과 정확하게 상쇄된다는 것은 (수동적) 중력질량이 관성질량과 동일하다(또는 비례한다)는 것을 의미한다.
- 등가원리를 받아들이면 '관성운동' 개념에 약간의 수정을 가해야 한다. 입자에 작용하는 외력(외부에서 입자에 작용하는 힘)의 총 합이 0일 때, 입자가 관성운동을 한다고 정의했었다.
p604 : 그러나 여기에 중력이 개입되면 문제가 다소 복잡해진다. 등가원리에 의해 중력과 가속도는 같으므로, 국소적으로는 물체가 가속운동을 하는지 또는 중력의 영향을 받고 있는지를 구별할 방법이 없다.
- 아인슈타인이 통찰력이 진가를 발휘한다.
- 입자에 가해지는 힘 중 '중력이 아닌' 모든 힘의 합이 0인 경우, 즉 중력장 하에서 자유낙하하는 물체의 운동을 '관성운동'으로 간주한다는 것이다(이런 경우에 유효중력은 0으로 줄어든다)
- 지구의 표면 위에 가만히 서 있는 사람의 운동은 아인슈타인의 관점에서는 관성운동이 아니다. 중력장 안에서 정지된 상태는 자유낙하가 아니기 때문이다. 뉴턴은 '정지

상태'를 관성운동으로 간주하므로, 그가 볼 때는 이 상황도 관성운동에 속할 것이다. 아인슈타인이 보기엔 관성운동이 될 수 없다.

p605 : 관성운동에 대한 아인슈타인의 관점을 시공간의 구조와 어떻게 결부시킬 수 있을까?

- 뉴턴의 이론을 재편성한 학자 중에 엘리 카르탕이 있다.
- 카르탕의 관점에 의하면, 시공간에서 세계선이 '직선'으로 나타나는 운동은 뉴턴의 관성운동이 아니라, 아인슈타인의 관성운동이다.

p606 : 중력장 안에서 누군가가 자유낙하하고 있다면, 그는 중력장의 존재를 전혀 느끼지 못할 것이다.

p612 : 아인슈타인의 일반상대성이론에 등장하는 두 가지 기본원리에 대해 알아보았다. 하나는 "물리 법칙은 정지 상태와 등속도 운동을 구별하지 않는다"는 '**상대성원리**'이고, 또 하나는 "중력을 고려하면 상대성 원리에 미묘한 수정이 가해져야 한다."는 '**등가원리**'이다.

- 세 번째 원리는 "빛의 속도가 유한하다"는 사실과 밀접하게 관련되어 있다.

p613 : 전자기현상과 빛의 특성을 서술하는 방정식은 양자역학이 탄생하기 전인 1865년 스코틀랜드 물리학자 제임스 클럭 맥스웰에 의해 발견되었다. 당시 맥스웰은 마이클 페러데이가 30여년 전에 연구한 실험적 사실들을 종합하여 전자기학을 완성할 수 있었다.

- 상대성원리에 의하면 두 관측자는 서로에 대하여 등속운동을 하고 있으므로 A가 얻은 물리법칙은 B가 얻은 물리법칙과 같아야 한다. 그런데 빛의 속도가 다르다는 것은 (맥스웰 방정식에 의해)물리법칙이 다르다는 것을 뜻한다. 즉, 빛의 속도가 항상(누구에게나)동일하다고 간주하면 당장 상대성원리에 모순이 발생하는 것이다.
- (i) "빛의 속도는 절대적으로 변하지 않는다"는 '맥스웰이론'과 (ii) "물리현상을 관측하는 기준계가 어떠한 속도로 움직이건 간에 물리법칙은 항상 동일하다"는 '상대성원리' 사이에 심각한 충돌이 발생했다.
- 뉴턴은(그리고 갈릴레오도) 빛을 입자로 간주했으므로, 빛의 속도는 당연히 광원의 속도에 따라 달라진다고 생각했다.
- 빛의 속도가 광원의 움직임에 상관없이 일정하다는 결론을 내릴 수밖에 없다.

p615 : 맥스웰의 이론에 의하면 빛은 입자가 아니라 파동이며, 그가 유도한 방정식에는 이 파동의 전달속도가 '변하지 않는 상수'의 형태로 등장한다.

- 시공간 기하학적인 관점을 유지하면 맥스웰 이론과 상대성원리 사이의 충돌을 해결할 수 있다.
- 시공간 속에 광속 c처럼 근본적으로 불변인 속도가 존재한다는 것은 과연 무엇을 의미하는가?
- 맥스웰 이론은 빛을 파동으로 간주하지만, 빛을 광자의 모임으로 간주해도 논리적

으로 심각한 충돌을 일어나지 않는다.
p619 : 갈릴레오의 상대성원리를 수용하면서도 절대공간의 개념을 포기했었다(이 과정은 그다지 극적이지 않기 때문에, 일부 독자들은 인식을 못했을 수도 있다). 따라서 공간과 마찬가지로 시간도 절대적 개념이 아니라는 주장은 '혁명'이라 부르기에 다소 부족한 감이 있다.
p620 : 절대시간의 개념이 우리의 사고 속에 깊이 뿌리내릴 수 있었던 것은 빛의 속도가 일상적인 물체의 속도가 비교가 안 될 정도로 빠르기 때문이다.
p621 : 시공간의 그림을 처음 도입했던 헤르만 민코프스키(1864-1909)는 아인슈타인의 스승이기도 했다. 1908년 시간이나 공간은 실체가 드리우는 그림자에 불과하다. 앞으로는 이들이 하나로 통합된 시공간이 독립적인 실체로 부상하게 될 것이다. 특수상대성 이론은 아인슈타인의 탁월한 통찰력과 로렌츠, 푸앵카레의 빛나는 업적에도 불과하고, 민코프스키가 시공간이라는 혁명적이라는 개념을 도입하기 전까지 완전한 이론이 아니었다고 생각한다.
p623 : 어떠한 신호나 물질도 빛보다 빠르게 진행할 수 없다. 빛원뿔의 내부(또는 옆면)에서는 이와 같은 제한조건이 항상 적용된다.
p624 : 아인슈타인의 일반상대성이론에 등장하는 시공간은
 - 갈릴레오 시공간을 일반화해서 뉴턴(카르탕) 시공간을 얻은 것처럼, 민코프스키 공간을 일반화 하면 아인슈타인 시공간을 얻을 수 있다.
p626 : 아인슈타인의 개념에 의거한 관성운동이 시공간의 계량에 의해 유일하게 결정되는 것이다.

18. 민코프스키 기하학

p630 : 민코프스키 공간 M은 여러 가지 면에서 4차원 유클리드 공간 E^4와 비슷하지만, 중요한 부분에서 결정적으로 다른 특징을 가지고 있다.
p633 : 상대성이론의 초창기에 물리학자들은 "시간좌표 t를 아래와 같이 순허수로 대치하면 민코프스키 공간 M과 E^4사이의 기하학적 유사성이 뚜렷하게 드러난다."는 점을 유난히 강조하였다.
 - t를 iw로 대치하면 민코프스키 계량에 입각하여 계산된 dl^2과 E^4사이의 ds^2의 형태가 동일해지기 때문이다. 그러나 '공간좌표는 실수이면서 시간좌표만 허수로 표현되는' 이상한 좌표계에 물리적 의미를 부여하기란 결코 쉬운 일이 아니다.
 - 시간만 허수로 취급하는 비정상적인(적어도 내가 보기에는 그렇다) 접근법을 잊어버리고, 아예 모든 좌표를 몽땅 허수로 취급해보자.
p636 : 민코프스키 공간 M의 10차원 대칭군은 이 분야에서 탁월한 업적을 남긴 프랑

스 수학자 앙리 푸엥카레(1854-1912)의 이름을 따서 ‘푸엥카레군’이라 부른다. 그는 아인슈타인이 특수상대성이론(1905)을 발표하기 전인 1898-1905년 사이에 상대성이론의 기초가 되는 수학체계를 이미 완성해 놓았다.

p637 : E^4의 유클리드 운동에 대한 대칭군은 10차원이다. 이 중에 원점이 고정된 회전 대칭군은 6차원이고, 원점의 이동에 대한 병진운동에 대한 대칭군이 4차원이다. 민코프스키 공간 M의 경우에는 6차원 로렌츠군과 4차원 병진대칭군이 결합되어 10차원 푸앵카레 대칭군을 이룬다.

p641 : 유클리드 공간에서는 두 점 사이를 연결하는 선 중에서 직선이 가장 짧지만, 민코프스키 공간에서 두 고정된 사건 사이의 시간간격은 직선, 즉 관성경로를 따라 갔을 때가 가장 크다.(17.9절 참조)

p644 : 유클리드 기하학에서, 고정된 한 점 O로부터 고정된 거리 a만큼 떨어져있는 점들의 집합은 구면을 형성한다. 물론, E^4에서 이 조건을 만족하는 점들은 3차원 구면 S^3을 이룬다, 그렇다면 M에서는 어떻게 될까? 답은 두 가지 부류로 나눌 수 있다. a가 양의 실수인 경우와 순허수인 경우가 바로 그것이다.

p646 : 요한 람베르트가 1786년에 창시했던 기하학, 즉 유클리드의 제5공준이 성립하지 않는 기하학을 떠올려 보자. 람베르트는 허수 반지름을 갖는 구를 고려하면 제 5공준이 위배되는 기하학을 구축할 수 있다고 제안했다.

p656 : 구의 뒤쪽에서 출발한 빛이 관측자의 눈에 도달하려면 구의 앞쪽에서 출발한 빛보다 더 먼 거리를 이동해야 하고, 이 시간 동안 물체는 앞으로 이동하기 때문에 피츠제럴드-로첸츠 수축효과와 ‘경로차에 의한 팽창효과’가 정확하게 상쇄되어 결국 물체는 구형으로 보이게 된다.

p657 : 뉴턴역학에서 말하는 에너지, 운동량, 각운동량을 미리 알아 두는 편이 좋을 것 같다. 이 양들을 뉴턴의 운동역학에서 중요하게 취급하는 이유는 물리계에 외력이 작용하지 않을 때 보존되는 양이기 때문이다. 즉, 외력이 없는 물리계의 총에너지와 운동량, 각운동량은 시간이 흘러도 변하지 않는다.

p660 : 상대성 이론에서는 어떻게 달라지는가? i) 에너지 보존이나 운동량보존, 각운동량보존, 또는 질량중심의 운동같은 개념이 상대성 이론에서도 통용될 것인가? ii) 질량보존의 법칙은 어떻게 되는가? 질문 i)에 대한 답은 ‘'yes' 이다.

p661 : 질량보존 법칙(질문 ii))은 상대성이론에서는 참으로 희한한 변화를 겪게 된다. 뉴턴은 에너지와 질량을 ‘독립적으로 보존되는 양’으로 간주했지만, 상대성 이론에서는 이들이 하나의 법칙으로 통합된다.

- 상대성이론은 시간과 공간을 하나로 통합하여, ‘시공간’이라는 새로운 개념을 만들어 냈다.
- 에너지와 운동량도 이와 비슷한 방법으로 통합된다. 특수상대성이론에서 에너지 -

운동량 4-벡터를 통해 하나로 통합된다.
p663 : 에너지 보존법칙과 운동량보존법칙, 그리고 질량보존법칙이 이 하나의 법칙 속에 통합되는 것이다.

19. 맥스웰과 아인슈타인이ㅡ 고전적 장

p670 : 뉴턴이 그의 탁월한 역학체계를 완성하여 1687년에 "프린키피아"를 통해 발표한 후, 1905년 아인슈타인의 특수상대성이론이 등장하기 전까지 커다란 발전을 이루었다.
 - 가장 극적인 것은 19세기에 패러데이와 맥스웰이 도입한 물리적 장(field)의 개념을 둘 수 있다.
 - 1915년 아인슈타인이 휘어진 시공간을 기반으로 하는 일반상대성이론을 구축할 때에도 장의 개념은 핵심적인 역할을 했다. 현대 물리학에서 말하는 '고전적 장'이란 맥스웰의 전자기장과 아인슈타인의 중력장을 의미한다.
 - 1900년에 막스플랑크가 양자가설을 처음 도입하고서야 약 25년에 걸쳐 수많은 학자들의 노력으로 완성된 양자역학은 기존 뉴턴역학을 수정-보완하면서 원자규모의 미시세계에서 일어나는 현상들을 훌륭하게 설명해 주었다.
p671 : 이 장에서는 맥스웰과 아인슈타인의 물리적 장이론, 즉 고전적인 전자기학과 중력이론을 집중적으로 다룰 예정이다. 전자기학은 장이론의 양자역학 버전인 양자장이론에서 중요한 역할을 하는데 이 내용은 26장에서 소개될 것이다. 반면에, 중력장의 양자역학 버전은 수많은 논쟁을 불러일으키면서 아직도 완성되지 않은 채로 남아있다. 양자중력이론은 이 책의 28장부터 순차적으로 논의할 예정이다.
 - 19세기 초부터 뉴턴물리학에 변화의 바람이 불기 시작했다. 최초의 변화는 1833년에 마이클 패러데이가 자신이 얻은 시험결과를 새롭게 해석하면서 시작되었다.
p672 : 뉴턴은 물질을 이루는 '입자'와 이들 사이에 작용하는 '힘'을 기본적인 양으로 간주했지만, 스코틀랜드의 물리학자 제임스 클럭 맥스웰은 1864년 장은 에너지를 한 곳에서 다른 곳으로 옮길 수 있다는 사실을 증명하였다. 맥스웰이 유도한 방정식에는 전기장과 자기장, 그리고 빛의 행동양식이 하나로 통합되어 있었는데, 이것이 바로 '맥스웰 방정식'이다.
p673 : 맥스웰방정식은 전기장의 세 성분과 자기장의 세 성분의 시간에 따른 변화를 서술하는 편미분방정식이다.
 - 전기장과 자기장은 시공간 2-형식 $\boldsymbol{F}$(맥스웰 장텐서)속에 통합되고, 전하밀도와 전류밀도는 시공간 벡터 $\boldsymbol{J}$(전하-전류벡터)속에 통합된다.
p677 : 맥스웰방정식을 아래와 같이 간단한 형태로 쓸 수 있다.

$$dF = 0, \qquad\qquad d^{*}F = 4\pi^{*}F$$

p678 : 맥스웰이 물리학사에 남긴 가장 큰 업적은 자신의 방정식을 통해 전자기파가 정확하게 빛의 속도로 전달된다는 사실을 알아낸 것이다.

- 맥스웰이 방정식을 유도하고 근 25년이 지난 1888년 하인리히 헤르츠는 일련의 실험을 통해 맥스웰이론이 옳다는 것을 확인하였다.

p679 : 전하-전류벡터의 다이버전스가 0이라는 사실을 이용하면 전하보존법칙을 나타내는 방정식을 유도할 수 있다.

p680 : 시공간에서의 전하보존법칙, 민코프스키 시공간 M에서 닫힌 3-곡면 Q는 컴팩트한 4-차원 입체도형 R의 경계 ∂R에 해당되고, 여기에 외미분의 기본정리를 적용하면 $\int_{Q} {}^{*}J = \int_{R} d^{*}J = 0$이 된다.

- R의 내부로 유입되는 전하량은 R의 외부로 유출되는 전하량과 정확하게 같다. 전기전하는 보존된다.

p681 : 맥스웰의 두 번째 방정식 $d^{*}F = 4\pi^{*}J$를 이용하면 가우스법칙을 유도할 수 있다.

p682 : 맥스웰의 첫 번째 방정식 $dF = 0$을 이용하면 또 하나의 보존법칙을 얻을 수 있다.

- F의 발생원이 없다는 것은, 곧 자연계에 자기홀극이 존재하지 않는다는 것을 의미한다.

- 맥스웰 방정식의 관점에서 볼 때, 자기홀극이 존재하지 않은 이유는 없다.

p683 : 이 우주 안에 자기홀극은 존재하지 않는다는 주장이 정설로 받아들여지고 있다.

p685 : 1915년에 아인슈타인이 일반상대성이론을 발표한 후, 1918년에 헤르만 바일은 경로에 따라 달라지는 길이 개념을 새롭게 도입하였다.

p688 : 바일의 이론을 접한 아인슈타인은 “수학적으로는 아름답지만, 물리적 관점에서는 반대한다”는 의견을 피력하였다.

- 양자역학은 물리계의 상태를 서술할 때 복소수를 상습적으로 사용하고 있다.

p689 : $\Phi : \rightarrow e^{j\theta}\Phi$ 대치는 길이변화 없이 복소평면(시간이나 공간차원과 직접적인 관계가 없는 평면)의 회전효과만을 줄 뿐이다.

p691 : 게이지접속 : 이 용어는 전자기학을 일반화해서 약한 상호작용과 강한 상호작용을 설명하는 현대 물리학의 양-밀스 이론에서도 그대로 통용되고 있다. 엄밀하게 말해서, 게이지 접속이라는 아이디어 자체는 ‘정확하면서도 관측되지 않는’ 대칭(전자기학에서는 $\Phi : \rightarrow e^{j\theta}\Phi$ 대칭)에 의존한다.

 - 현대 물리학자들이 ‘게이지’ 개념을 사방에 갖다 붙이는 바람에 용어의 의미가 매우 모호해졌다.
 - 지금부터는 고전적인 장(주로 중력장)을 게이지 이론의 관점에서 분석해 보기로 한다.
 - 가장 중요한 것은 장의 ‘에너지 밀도’이다. 에너지 밀도는 중력장의 발생원으로 해석될 수 있다.
 - 뉴턴의 중력이론에 의하면 중력은 질량으로부터 발생하는 힘이다. 따라서 우리는 맥스웰의 장을 비롯한 다양한 장의 에너지 밀도를 표현하는 방법을 알아야 하고, 에너지 밀도가 중력의 발생원으로 작용하는 원리도 이해해야 한다.
p693 : 중력이 없으면, 시공간은 평평하며 (민코프스키 공간) 총 질량은 보존되고 총 운동량의 세 성분도 각각 보존된다.
 - 중력이 존재하면, 에너지-운동량의 적분형 보존방정식을 유도할 수가 없다.
 - 물리학에서 가장 중요한 보존법칙인 에너지-운동량 보존법칙이 어디론가 사라져 버린 것이다.
p697 : 텐서가 필요한 이유 중 하나는 시공간이 휘어져 있기 때문이다.
 - 텐서의 미적분은 아인슈타인의 이론에서 핵심적인 역할을 하는데, 그 근본적인 이유는 일반상대성이론의 출발점인 등가원리로 거슬러 올라간다. 이 원리에서 중력은 힘으로 간주되지 않는다.
 - 중력은 힘이 아니라 시공간의 곡률로 그 모습을 드러낸다.
p698 : 좌표독립성(좌표계와 무관한 성질)이 없으면, 일반상대성이론은 죽은 이론이나 다름없다. 이것이 바로 ‘일반공변성 원리’이다.
 - 우리는 특정 시공간의 한 점이 다른 특정 시공간의 한 점과 같다고 단언할 수 없다.
- “일반공변성 원리에 의해, 중력은 좌표계에 무관하게 서술될 수 있다”는 사실을 기억하는 것으로 충분하다. 이것이 바로 아인슈타인의 이론에 텐서가 사용될 수밖에 없었던 가장 큰 이유이다.
p702 : 1917년에 아인슈타인이 제안했던 우주상수에 대해 알아볼 필요가 있다. 흔히 Λ(람다)로 기호로 표현하는 우주상수는 $10^{-55}cm^2$이하의 엄청나게 작은 상수이다.
p703 : 아인슈타인은 우주론적 규모에서 ‘닫힌 정적우주’가 이론적으로 가능하도록 하기 위해 우주상수를 도입하였다. 그러나 1929년에 에드윈 허블은 천문관측 결과를 분석한 끝에 우주가 팽창하고 있음을 확인하였고, 여기에 수긍한 아인슈타인은 자신이 도입했던 우주상수를 철회하였다.
 - 많은 학자들은 “기존 관측결과와 상충하지 않으려면 우주상수를 ‘암흑에너지’를 나타내는 양으로 해석해야 한다고 주장하고 있다.
p706 : 중력장 자신이 갖는 질량/에너지 문제로 되돌아가 보자.

p707 : 아인슈타인 장방정식을 적용하면 중력파(시공간에 생긴 일종의 물결)가 발생하여 양의 에너지를 계의 바깥쪽으로 실어 나른다는 것을 알 수 있다.
p709 : 아인슈타인 일반상대성이론은 다양한 실험과 관측을 통해 충분히 검증되었다. 헐스와 테일러는 중력파를 직접 관측하지 못했지만, 이들이 얻은 결과는 중력파의 존재를 입증하는데 아무런 문제가 없었다.
p711 : 상호작용하는 장의 보존법칙을 얻어내는 일반적인 방법이 있다. 다음 장의 주제인 라그랑주 접근법이 바로 그것이다. 라그랑주 접근법은 중력에 필요한 모든 정보를 제공하지 않는 것 같지만 (적어도 직접적인 정보는 주지 않는다) 매우 강력하고, 일반적이면서도 아름다운 체계이다.

20. 라그랑지안과 헤밀토니안

p716 : 지금부터 고전역학의 전반적인 내용을 내 나름대로 소개하기로 한다.
- 뉴턴의 역학에서 수학적으로 아름다운 부분은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 라그랑지안 체계와 해미토니안 체계가 바로 그것이다. 라그랑주는 라그랑지안 체계와 해밀토니안 체계를 모두 알았고, 특히 라그랑지안 체계는 오일러에 의해 부분적으로 알려져 있었다.

p717 : 배위공간(configuration space)의 한 점은 계의 모든 입자와 강체의 특정한 공간적 배열상태에 대응한다.
- 라그랑주 함수는 **배위공간** c의 접번들 $T(c)$위에서 정의되며, 해밀토니안 체계에서 해밀토니안 함수는 **위상공간**(phase space)이라 부르는 여접번들 $T^{*}(c)$위에서 정의된다.

p718 : 라그장지안 접근법의 장점이다(해밀토니안의 경우도 마찬가지이다.) 사용자는 주어진 문제에 따라 가장 편리한 좌표계를 마음대로 골라서 쓸 수 있다.
p719 : 라그랑지안 계의 운동에너지와 내력 또는 외력에 의한 위치에너지의 차이로 정의된다.
- 라그랑지안이 만족하는 방정식을 '**오일러-라그랑주 방정식**'이라고 하는데, 여기에는 뉴턴의 운동방정식이 모두 함축되어 있다.
- 물리학자들은 이것을 '해밀턴의 원리' 또는 '정적작용원리'라고 부른다.

p720 : 오일러-라그랑주 방정식은 '작용'이라는 양을 최소화하는 쪽으로 움직인다. 작용이란 배위공간 c상의 두 고정된 끝점 a, b사이로 난 곡선을 따라가며 라그랑지안 L을 적분한 값이다.
- '최소화(minimize)' 보다 '정적(stationary)'이라는 단어가 더 적합하다.
- '(유사)리만 공간의 측지선'은 '최단 거리 경로'였고, 로렌츠 공간에서는 '최대 시간꼴 경로'가 언급된 적이 있는데, 이들은 모두 '정상 경로(stationary path)'라는 단어로

통합된다.
p723 : 해밀토니안 체계의 강점은 위상공간이 심플렉틱 다양체라는 데 있다.
 - (일반화된) 운동량과 위치의 함수인 H는 주어진 물리계의 총 에너지를 나타내는 양이며, (지금 우리는 시간에 무관한 라그랑지안과 해밀토니안을 고려하고 있다) 아래의 식을 이용하면 라그랑지안으로부터 직접 구할 수 있다.
p725 : 중력장에서 입자가 자유낙하하는 경우(20.1절 참조) 해밀토니안은 라그랑지안으로부터 다음과 같이 구해진다.
 - 총 에너지를 위치와 운동량으로 표현할 수 있으면 라그랑지안을 거치지 않고 해밀토니안을 직접 구할 수 있다.
p726 : 평형지점을 기준으로 진동하는 물리계를 살펴보자
p727 : 진폭이 아주 작을 때, 진동의 주기는 진폭의 크기(진자가 왕복하는 거리)와 무관하게 나타나는데, (이 사실은 1583년에 갈릴레오가 발견하였다.) 이런 종류의 운동을 '단조화운동(simple harmonic motion)이라고 한다.
 - 단조화운동은 자연계에서 가장 흔하게 일어나는 운동이다.
p728 : 진폭이 작은 진동은 여러 개의 특별한 진동모드로 분해될 수 있는데, 이것을 정규모드(normal mode)라고 한다. 각 정규진동모드의 진동수를 정규진동수(normal frequency)라고 한다.
p729 : 일반화된 좌표계의 원점을 평형상태로 잡으면 여러모로 편리하다. '평형'이란 운동이 없을 때, 계 전체가 정지상태에 있는 배열을 의미한다.
 - 안정된 평형이란 평형상태에 있는 계에 작은 변위를 가했을 때, 계가 평형에서 크게 벗어나지 않고 진동하는 경우를 말한다.
p732 : 일반적으로 자유도가 N인 고전적 물리계는 안정적 평형상태를 중심으로 진동할 수 있다. 이 진동은 서로 독립인 N개의 정규모드로 이루어져 있으며, 각 모드는 고유한 진동수를 갖는다.
 - 지금까지는 자유도가 유한한 계만을 다루었다. 여기서 유도한 모든 결과는 무한대의 자유도를 갖는 물리계에도 똑같이 적용할 수 있다.
p733 : 라그랑지안(또는 해밀토니안) 체계를 사용하는 과정에는 장 개념이 자연스럽게 개입된다.
 - 자연에 존재하는 모든 입자를 끈(고리형 끈이나 열린 끈)의 진동으로 이해하는 끈이론에서는 입자에 의해 형성된 장을 '진동하는 끈의 정규모드'로 해석하고 있다.
p734 : 유한차원 해밀턴 방정식의 특성을 심플렉틱 기하학과 연결해 보자.
 - 시간에 따른 계의 역학적 진행과정이 기하학적으로 단 하나의 스칼라 함수(해밀토니안) 속에 고스란히 담겨 있다는 점이다.
 - 라우빌의 정리에 따르면 위상공간의 부피는 역학체계에 의해 보존된다.
p735 : 라우빌의 정리 : 해밀토니안이 시간과 함께 흐름에 따라 (가능한 초기상태의

영역을 표기하는) 초기 위상공간의 형태는 달라질 수 있지만, 부피는 달라지지 않는다.
 - 해밀토니안은 궤적 위에서 일정한 상수값을 가지며 이는 곧 “닫힌 계의 총 에너지는 보존된다”를 의미한다.
p736 : 자연은 참으로 희한한 버릇을 가지고 있다. 우리 인간들이 강력하고 우아한 수학을 동원하여 자연을 만족스럽게 서술해 내고서 행복감에 빠져 있으면, 얼마 지나지 않아 우리 이해방식이 완전히 틀렸음을 넌지시 알려주는 것이다.
p737 : 해밀토니안이 그 대표적인 사례이다. 해밀토니안 역학으로 구현된 고전물리학은 양자역학과 양립할 수 없지만, 우리를 양자역학 세계로 인도한 것은 다름 아닌 해밀토니안 이었다.
 - 아인슈타인의 상대성 이론에 입각한 시간과 공간의 통합을 시도하는 상대론적 양자역학에서는 라그랑지안 체계를 채택해야 자연스러운 도약을 시도할 수 있다.
 - 어느 곳으로 도약한다는 말인가? 특수상대성 이론와 양자역학을 적절하게 결합해야 한다는 필요성이 대두하면서, 우리는 양자장 이론의 깊은 수렁 속으로 빨려 들어갔다.
 - 양자역학의 법칙에 이르려면 입자가 아닌 장을 상대로 승부수를 던져야 한다. 따라서 우리는 라그랑지안(또는 해밀토니안)을 이용하여 장을 다루는 방법을 알아 둘 필요가 있다.
 - 지금까지 라그랑지안과 해밀토니안 체계를 설명하면서 유한한 개수의 입자 및 강체로 이루어진 고전적 물리계만을 고려하였다.
p738 : 무한차원 배위공간에도 라그랑지안(또는 해밀토니안)을 사용할 수 있다. 이것은 고전이론과 양자이론을 전개하는 전형적인 방법이다. 단, 입자가 아닌 장을 다둘 때는 ‘범함수 미분(functional differentiation)’이라는 새로운 개념이 등장한다.
p739 : '범함수 미분‘으로 표현된 오일러-라그랑주 방정식은 한번쯤 구경하고 넘어갈 필요가 있다. (범함수 미분은 ∂ 대신에 δ 로 표기한다.)

$$\nabla \frac{\delta L}{\delta \nabla \phi} = \frac{\delta L}{\delta \phi}$$

 - 작용이 정적이라는 조건으로 부터 오일러-라그랑주 방정식이 유도되었고, 이것이 바로 해밀토니안 원리였다.

p740 : 라그랑지안 L은 시공간의 밀도로 해석될 수 있다.
p741 : “모든 변수를 변화시켜도 S는 정적이다”라는 사실로부터 장 방정식이 얻어지는 셈이다. 이것은 모든 장과 그들의 도함수에 대한 L의 변분 도함수라 0이라는 것을 의미하며, 이 사실을 간단하게 표현하면 다음과 같다.

$$\delta S = 0$$

 - **뇌터 정리**에 의하면 일상적인 라그랑지안이 연속(매끈한) 대칭을 가지며, 이 대칭성에 대응하는 보존법칙이 존재한다. 특히, 라그랑지안이 시간(병진)이동에 대칭이면, (즉, 시간이 흘러도 변하지 않으면) 계의 에너지가 보존되고, 공간(병진)이동에 대칭이면 (위치가 달라져도 변하지 않으면) 계의 운동량이 보존된다. 또한, 어떤 축을 기준으로 계 전체가 회전해도 라그랑지안이 변하지 않으면, 그 축에 대한 계의 운동량이 보존된다.
 - 일반적으로 평평한 시공간에서 고립된 물리계는 이와 같은 대칭성을 갖고 있다.

p742 : 중력에 뇌터 정리를 적용하기 어려운 이유는 점근적으로 평평한 시공간에서도 일반상대성 이론의 각 운동량에 의문점이 남아 있기 때문이다.
 - 아인슈타인의 이론은 라그랑지안으로부터 유도될 수 있다.

p743 : 현대 기초물리학에서 새롭게 제기되는 이론들은 거의 예외 없이 **라그랑지안 범함수에서 출발**하고 있다.

p745 : 장의 라그랑지안은 수학적으로 매우 유용할 뿐만 아니라, 물리학이론에 수많은 가능성을 부여해 왔다. 그러나 나는 기초물리학 이론을 발전시키려는 시도가 라그랑지안에 너무 의존하는 것이 그다지 반갑지 않다.

END